ESERCIZIO: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $\quad N = X+Y$
$Y \sim \mathcal{P}(\mu)$
v. r. e. c $\quad$ di X (~~sapendo~~ rispetto) N

$\mathbb{P}(X \in A \mid N = k) = \ ?$
Basta calcolare $\mathbb{P}(X = n \mid N = k)$ $\quad$ (fine di questa parte)

3. PROCESSI

def. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sp di probabilità, $(E, \mathcal{E})$ sp. di arrivo. Insieme di tempi $I = \mathbb{N}$ (o $\mathbb{R}^+$, $[0,T]$, $[a,b]$)
Un **PROCESSO** è una famiglia $(X_t)_{t \in I}$ con X_t v.a.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longmapsto (E, \mathcal{E}) \quad \forall t \in I$

Per tutta la prima parte avremo $I = \mathbb{N}$ o $I = \{0, \dots, N\}$ e si chiama **PROCESSO a TEMPO DISCRETO.**

Quindi in questo caso un processo è una famiglia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di v.a.

def: La **TRAIETTORIA** di un processo è, fissato ω
$$n \longmapsto X_n(\omega)$$

def: Chiamo **FILTRAZIONE** su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ una successione di σ-algebre $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tali che:
(1) $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F} \quad \forall n$
(2) $\mathcal{F}_{n+1} \supset \mathcal{F}_n \quad \forall n$ (ovvero l'informazione si completa, quella dopo è di più di quella prima)

def: $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ processo. Dico che è **ADATTATO alla FILTRAZIONE** $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se $\forall n \in \mathbb{N}$ X_n è $\mathcal{F}_n$-misurabile

def: Se $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è un processo posso sempre definire
$$\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, \dots, X_n)$$
Questa si chiama **FILTRAZIONE NATURALE** e $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è adattato a $(\mathcal{F}_n^X)_{n \in \mathbb{N}}$

ESEMPIO: $\Omega = \{(a_1, \dots, a_{100}) : a_i \in \{0,1\}\}$
$X_1(\omega) = a_1, \dots, X_{100}(\omega) = a_{100}$
$\Rightarrow \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$
$\mathcal{F}_1 = \sigma(X_1) = \{A_1, A_1^c, \emptyset, \Omega\}$ con $A_1 = \{\omega : a_1 = 1\}$
$\mathcal{F}_2 = \sigma(X_1 X_2) = \sigma(A_1, A_2)$ con $A_2 = \{\omega : a_2 = 1\}$
$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è adattato alla filtrazione (ovvio, è la filtr. naturale)
Possiamo avere altri processi adattati alla stessa filtrazione, ad esempio: $S_n = X_1 + \dots + X_n$

$(S_k)_{k = 0, \dots, 100}$ è un processo adattato a $(\mathcal{F}_n)_{n \in \{0, \dots, 100\}}$
Mentre $F_k = X_{k+1} + \dots + X_{100}$ non è un processo adattato

30/03/2012

ESEMPIO: $\Omega = [0,1[$, $\mathcal{F}_n = \sigma\left([\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}) \ k = 1, \dots, 2^n\right)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1))$
$\mathbb{P} = Leb.$

$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_{n+1} \supseteq \mathcal{F}_n$

Per esercizio mostrare che $\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n\right) = \mathcal{F}$

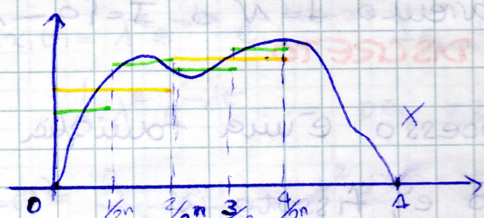
Serve fare $\sigma(\dots)$ o basta già $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$?

Calcolo $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ dove X è una v.a. $L^1([0,1), \mathbb{R})$.

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) = \sum_{k=1}^{2^n} \mathbb{E}^{\mathbb{P}(\cdot | [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}))}(X)\, I_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})}$$

$$= \sum_{k=1}^{2^n} \left\{ \frac{1}{\underbrace{1/2^n}_{\text{misura dell'insieme}}} \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} X(\omega)\, d\omega \right\} I_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})}$$

$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{n-1})$



Se poniamo $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ allora $X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega)$ $n \to \infty$

In generale $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\{\mathcal{F}_n\}$ filtrazione.
Un processo $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è adattato a $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se $\forall n$ X_n è $\mathcal{F}_n$ misurabile

def: Un **PROCESSO** è **PREVEDIBILE** se X_{n+1} è $\mathcal{F}_n$-misurabile

ESEMPIO: $\xi_1, \xi_2, \dots$ v.a. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{E})$

$\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$ $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

$\forall n$ $\varphi_n : (E^n, \mathcal{E}^{\otimes n}) \to (H, \mathcal{H})$

$X_n = \varphi_n(\xi_1, \dots, \xi_n)$ è un processo adattato a $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\hat{X}_n = \varphi_{n-1}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ è un processo prevedibile

ESEMPIO: $\xi_i = \mathcal{B}(1, p)$ indipendenti

$\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$

$X_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ è un processo adattato (è una passeggiata aleatoria simmetrica se $p = 1/2$, non " se $p \neq 1/2$)

def: (X_n) processo a valori in $\mathbb{R}$ è una **MARTINGALA** (relativamente alla filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$) se:
(1) X_n è ADATTATO alla filtrazione $\mathcal{F}_n$
(2) $X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\forall n$
(3) $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) = 0$ $\mathbb{P}$-q.c.

Ovvero 3 ci dice che la speranza di guadagno è zero.
(3) si può riscrivere in:
$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$

ESEMPIO: $X \in L^1(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$, $\mathcal{F}_n$ filtrazione

$X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)$ è adattato a $\mathcal{F}_n$ ed è una martingala

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n) \underset{\text{dato che } \mathcal{F}_n \text{ è filtr.}}{=} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n) = X_n$$

PROP: Per una qualsiasi martingala, $\forall m \geq n$

$$\mathbb{E}(X_m \mid \mathcal{F}_n) = X_n$$

dim: $\mathbb{E}(X_m \mid \mathcal{F}_n) \overset{\text{tanto } \mathcal{F}_{m-1} \supseteq \mathcal{F}_n}{=} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_m \mid \mathcal{F}_{m-1}) \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{m-1} \mid \mathcal{F}_n)$

vado avanti così fino ad arrivare a X_{n+1} e ho la tesi
$m-(m-n-1)$

OSS: Se (X_n) è martingala definita solo per $n = 1, \dots, N$ allora (X_n) è sicuramente del tipo:

$$X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n) \quad \text{con } X = X_N$$

def: Diciamo che $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una **SUPERMARTINGALA** (o **SUBMARTINGALA**) se:

(1) X_n è adattato
(2) $X_n \in L^1 \ \forall n$
(3) $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \leq X_n$ $\mathbb{P}$-q.c. $(\geq)$ ← è controintuitivo ma è giusto così! :)

ESEMPIO: $\xi_1, \xi_2, \dots$ v.a. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ indipendenti e in L^1

$\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$

$X_n = \xi_1 + \dots + \xi_n \qquad X_0 = 0$

$$\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \overset{\text{indipendenza}}{=} \mathbb{E}(\xi_{n+1})$$

X_n è martingala sse $\mathbb{E}(\xi_i) = 0 \ \forall i$, è una supermartingala sse $\mathbb{E}(\xi_i) \leq 0$ ed è una submartingala sse $\mathbb{E}(\xi_i) \geq 0$

OSS: X_n è supermartingala sse $-X_n$ è submartingala. X_n è martingala sse è supermartingala e submartingala.

ESEMPIO: $(\xi_i) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ indipendenti e tutte L^1 ≥ 0

$\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$

$X_n = \xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_n \qquad X_0 = 1$

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\underbrace{\xi_{n+1}}_{\text{indip da } \mathcal{F}_n} \overbrace{X_n}^{\mathcal{F}_n\text{-misurabile}} \mid \mathcal{F}_n) = X_n \, \mathbb{E}(\xi_{n+1})$$

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è martingala sse $\mathbb{E}(\xi_i) = 1$
è una supermartingala $\mathbb{E}(\xi_i) \leq 1$
" " submartingala sse $\mathbb{E}(\xi_i) \geq 1$

ESEMPIO: η_i iid $B(1, p)$ (gioco di scommesse)

Vogliamo che ogni volta gioco tutto il capitale, se perdo perdo tutto, quanto devo vincere per avere gioco equo?

$$X_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{se } \eta_{n+1} = 0 \\ cX_n & \text{se } \eta_{n+1} = 1 \end{cases} \Rightarrow X_{n+1} = c\,\eta_{n+1} X_n$$

(X_n) martingala $\iff \mathbb{E}(c\,\eta_i) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{p}$

ESEMPIO: (Y_n) catena di Markov omogenea in E con probabilità di transizione

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = j \mid Y_n = i) = p_{ij}$$

$\varphi: E \to \mathbb{R}$, $\mathcal{G}_n = \sigma\{Y_0, Y_1, \dots, Y_n\}$

$X_n = \varphi(Y_n)$ condizioni su φ affinché (X_n) sia una martingala (o sub, o super)

$$\mathbb{E}(\varphi(Y_{n+1}) \mid \mathcal{G}_n) = \sum_{i_0 \dots i_n \in E} \mathbb{E}(\varphi(Y_{n+1}) \mid Y_0 = i_0, \dots, Y_n = i_n)\, I_{\{Y_0 = i_0, \dots, Y_n = i_n\}}$$

posso toglierli tutti e tenere solo $Y_n = i_n$

$$= \sum_{i \in E} \Big\{ \sum_{j \in E} \varphi(j)\, \mathbb{P}(Y_{n+1} = j \mid Y_n = i)\, I_{\{Y_n = i\}}$$

cost quindi la porto fuori — quando fisso $Y_{n+1} = j$

$$= \sum_{i \in E} \sum_{j \in E} p_{ij}\, \varphi(j)\, I_{\{Y_n = i\}}$$

(X_n) è martingala sse:

$$\mathbb{E}(\varphi(Y_{n+1}) \mid \mathcal{G}_n) = \varphi(Y_n)$$

$$\sum_{i \in E} \Big(\sum_{j \in E} p_{ij}\, \varphi(j) \Big) I_{\{Y_n = i\}} = \sum_{i \in E} \varphi(i)\, I_{\{Y_n = i\}}$$

$\iff \varphi(i) = \sum_j p_{ij}\, \varphi(j)$

e super se $\varphi(i) \geq \sum_j p_{ij}\, \varphi(j)$ e sub se $\leq$

ESEMPIO: **Passeggiata aleatoria simmetrica su $\mathbb{Z}$**

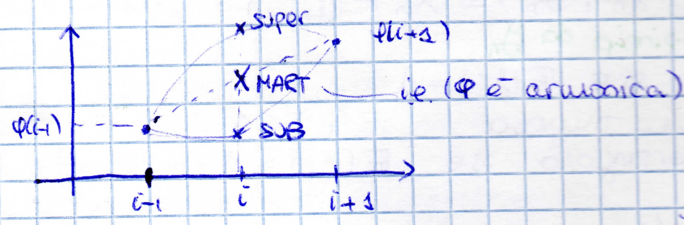
$p_{i,i+1} = 1/2 \quad p_{i,i-1} = 1/2 \quad p_{ij} = 0$ altrimenti

(X_n) martingala se $\forall i$

$$\varphi(i) = \tfrac{1}{2}\big[\varphi(i+1) + \varphi(i-1)\big]$$

è super se $\varphi(i) \geq \frac{1}{2}[\varphi(i+1) + \varphi(i-1)]$

è sub se $\varphi(i) \leq \frac{1}{2}[\varphi(i+1) + \varphi(i-1)]$



se no, non ha senso investire se $u < 1$ ed è troppo comodo se $d > 1$

ESEMPIO: $S_0 = 1 \qquad S_{n+1} = \begin{cases} u\, S_n \\ d\, S_n \end{cases} \qquad 0 < d \leq 1 \leq u$

(d: mercato è andato giù; u: mercato è andato su)

Posso sempre trovare una modellizzazione di questa evoluzione (una misura) che mi renda (S_n) una martingala

Costruisco $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ di v.a. indipendenti e a valori in $\{u, d\}$

$\xi_i = (u-d)\eta_i + d$ dove (η_i) è processo di Bernoulli $(1, p)$ (con prob p di successo)

$S_0 = 1, \dots, S_{n+1} = \xi_{n+1} \cdot S_n = \xi_{n+1} \cdot \dots \cdot \xi_1$

Posso trovare p in modo che (S_n) è una martingala

(S_n) mart. $\Leftrightarrow \mathbb{E}(\xi_i) = 1 \Leftrightarrow up + d(1-p) = 1$

se $u > d \Rightarrow p = \frac{1-d}{u-d}$

9

04/04/2012

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingala. All'istante $n-1$ decido di scommettere C_n sul risultato seguente.
Ottengo una variazione $C_n(X_n - X_{n-1})$.
E' ragionevole pensare che C_n sia $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabile.

Incremento totale all'istante n:

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} C_k(X_k - X_{k-1}) \qquad (Y_0 = 0)$$

ESEMPIO: Se $C_k = 1 \Rightarrow Y_n = X_n - X_0$

rispetto a $\mathcal{F}_n$

TEO: Dato $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ processo prevedibile a valori in $\mathbb{R}$, tale che $C_n(X_n - X_{n-1}) \in L^1$ $\forall n$ definisco:

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} C_k(X_k - X_{k-1})$$
$$Y_0 = 0$$

e si denota con $(Y) = C \bullet X$ o $(Y) = \int C\,dX$.

rispetto a $\mathcal{F}_n$

Se X è una martingala allora Y è una martingala. $\Rightarrow$ adattato
Se X è una sub/supermartingala e $C_n \geq 0$ $\forall n$ $\mathbb{P}$-q.c. allora Y è una sub/super martingala.

dim: Dobbiamo mostrare che $\mathbb{E}(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) = Y_n$ oppure che $\mathbb{E}(Y_{n+1} - Y_n | \mathcal{F}_n) = 0$

$$\mathbb{E}(Y_{n+1} - Y_n | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(C_{n+1}(X_{n+1} - X_n) | \mathcal{F}_n) = C_{n+1}\,\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n)$$

$= 0$ se X martingala, ≤ 0 se X è superm., ≥ 0 se X è subm. ■

Sia ora $C_n = 1$ fino a un certo tempo τ e $= 0$ dopo.
τ = v.a. a valori in $\mathbb{N}$, ovvero τ è il tempo in cui io decido di smettere di giocare.

def: Una variabile aleatoria $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}) \xrightarrow{\tau} \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ si dice **TEMPO d'ARRESTO** se $\forall n \in \mathbb{N}$ $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$

Ovvero se la decisione "mi fermo all'istante n" è preso in base a informazioni che avevo all'istante n.

OSS: $\{\tau = +\infty\} = \left\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\tau = n\}\right\}^c \in \mathcal{F}_\infty := \sigma\{\mathcal{F}_n : \forall n \in \mathbb{N}\}$

non smetto mai di giocare.

nel caso discreto potevo prendere questo come definizione

OSS: Se τ è un tempo d'arresto $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ infatti

$$\{\tau \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \underbrace{\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k}_{} \quad k \leq n \Rightarrow \in \mathcal{F}_n$$

$\{\tau \geq n\} \in \mathcal{F}_{n-1}$ dato che $\{\tau \geq n\} = \{\tau < n\}^c = \{\tau \leq n-1\}^c$

dato che siamo nel discreto

OSS: se $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \; \forall n \Rightarrow \tau$ è tempo d'arresto
infatti:

$$\{\tau = n\} = \{\tau \leq n\} \cap \{\tau \leq n-1\}^c \in \mathcal{F}_n$$

def: Definisco $C_n = I_{[0,\tau]}(n) = \begin{cases} 1 & n \leq \tau \\ 0 & n > \tau \end{cases}$

PROP: (C) è prevedibile.

dim: $\{C_n = 0\} = \{\tau < n\} \in \mathcal{F}_{n-1}$
Dato che C_n ha due valori e l'altro viene il complementare di questo e quindi è misurabile anche esso ($\in \mathcal{F}_{n-1}$)

CORO: (del TEO) $\int I_{[0,\tau]} dX$ è una martingala se X è una martingala, è superm. se X è superm, ed è subm se X è subm.

Com'è fatto $\int I_{[0,\tau]} dX = (Y)$?

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} C_k (X_k - X_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} I_{[0,\tau]}(k)(X_k - X_{k-1})$$

$$Y_n I_{\{\tau = m\}} = \sum_{k=1}^{n} I_{[0,\tau]}(k)(X_k - X_{k-1}) I_{\{\tau = m\}} \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

$n \wedge m = \inf(n,m)$

$$= \sum_{k=1}^{n \wedge m} (X_k - X_{k-1}) I_{\{\tau = m\}} = (X_{n \wedge m} - X_0) I_{\{\tau = m\}}$$

NOTA ⊛: $Y_n = X_{n \wedge \tau} \; \cancel{=} \begin{cases} X_n & \text{se } n \leq \tau \\ X_\tau & \text{se } n > \tau \end{cases} - X_0$

il $-X_0$ ci vuole però ⊛ per i risultati dopo non serve dato che X_0 è $\mathcal{F}_0$-misurabile

$(X_{n \wedge \tau})_{n \in \mathbb{N}}$ si dice **PROCESSO ARRESTATO** e si indica anche con $(X_n^\tau)_{n \in \mathbb{N}}$

CORO: $(X_{n \wedge \tau})_{n \in \mathbb{N}}$ è un processo adattato ed è martingala se (X) è martingala, sub se è sub e super se è super.

OSS: $(X_{\tau \wedge n})(\omega) = X_{\tau(\omega) \wedge n}(\omega)$ ovvero:

$$X_{\tau \wedge n}(\omega) = \sum_{k=0}^{n} X_k(\omega) I_{\{\tau = k\}}(\omega) + X_n I_{\{\tau > n\}}$$

CORO: Se X è martingala (super) (sub) $\mathbb{E}(X_{\tau \wedge n}) \overset{(\leq)}{\underset{(\geq)}{=}} \mathbb{E}(X_{\tau \wedge 0}) = \mathbb{E}(X_0)$

$n \wedge 0$??

deve essere costante rispetto a (n) o τ ??

PROP: $\tau, \sigma, \{\tau_i\}$ di tempi d'arresto. Allora:

(0) $\tau + c$ è un t.a. $\forall c \in \mathbb{N}$

(1) $\tau + \sigma$ è un t.a.

(2) $\max(\tau, \sigma)$ e $\min(\tau, \sigma)$ sono tempi di arresto

(3) $\limsup_i (\tau_i)$ è t.a.

dim: (0) $\{\tau + c = n\} = \{\tau = n - c\} \in \mathcal{F}_{n-c} \subseteq \mathcal{F}_n$

(1) $\{\tau + \sigma = n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \underbrace{\{\tau = k, \sigma = n-k\}}_{\{\tau = k\} \cap \{\sigma = n-k\}}$

$\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$, $\{\sigma = n-k\} \in \mathcal{F}_{n-k}$, $\subseteq \mathcal{F}_n$

(2) $\{\max(\tau, \sigma) \leq n\} = \{\tau \leq n\} \cap \{\sigma \leq n\} \in \mathcal{F}_n$

$\{\min(\tau, \sigma) \leq n\} = \{\tau \leq n\} \cup \{\sigma \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ ...

LEMMA: $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \Rightarrow \sup_n \tau_n$ è t.a.

$\tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \Rightarrow \inf_n \tau_n$ è t.a.

dim: $\{\sup_n \tau_n \leq m\} = \bigcap_n \{\tau_n \leq m\} \in \mathcal{F}_m$

$\{\inf_n \tau_n \leq m\} = \bigcup_n \{\tau_n \leq m\} \in \mathcal{F}_m$ ■

... (3) So fare gli inf e sup e so fare i limiti monotoni quindi riesco a fare il limsup (verificare) ■

PROP: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $X_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow (E, \mathcal{E})$ sia processo adattato a $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (filtr.)
Fisso $A \in \mathcal{E}$ e chiamo $\tau = \min\{n : X_n \in A\}$. Allora τ è un tempo di arresto.
(lo stesso se definisco $\tau = \min\{n : X_n \notin A\}$) Tempo di ingresso più che di arresto ma sono lo stesso cosa
(convenzione $\min(\emptyset) = +\infty$)

dim: $\{\tau = m\} = \{X_0 \notin A, \dots, X_{m-1} \notin A, X_m \in A\}$

$= \{X_0 \in A\}^c \cap \dots \cap \{X_{m-1} \in A\}^c \cap \{X_m \in A\} \in \mathcal{F}_m$

$\{X_0 \in A\} \in \mathcal{F}_0$, $\{X_{m-1} \in A\} \in \mathcal{F}_{m-1}$, $\{X_m \in A\} \in \mathcal{F}_m$ ■

OSS: Se usiamo il max allora τ non è un tempo di arresto, dato che dire che il massimo è n mi fa dire qualcosa su $n+1$ e quindi $\notin \mathcal{F}_n$

PROP: Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}}$ un processo adattato (ho aggiunto X_∞ - $\mathcal{F}_\infty$ misurabile, $\mathcal{F}_\infty = \sigma\{\mathcal{F}_n\ n\in\mathbb{N}\}$)
sia τ un tempo di arresto e definiamo

$$X_\tau = \sum_{k=0}^{\infty} X_k I_{\{\tau = k\}}$$

(ovvero $X_\tau(\omega)$ vale $X_k(\omega)$ se $\omega \in \{\tau = k\}$)
Allora X_τ è una v.a. misurabile rispetto a $\mathcal{F}_M$ dove $M = \max\{\tau(\omega) : \omega \in \Omega\}$

dim: $X_\tau = \sum_{k=0}^{M} X_k I_{\{\tau = k\}}$ è $\mathcal{F}_M$-misurabile

(X_k è $\mathcal{F}_k$-mis, $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$, $k \leq M$) ■

CORO: Se $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è un processo adattato. Se $X_n^\tau = X_{n\wedge\tau} = \begin{cases} X_\tau & \tau\le n \\ X_n & \tau > n \end{cases}$ e τ è un tempo d'arresto.

$\Rightarrow (X_n^\tau)_{n\in\mathbb{N}}$ è un processo adattato.

Ricordiamo il seguente teorema:

τ. t.c. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia processo adattato. (X_n) martingala
$\Rightarrow X_n^\tau$ martingala. In particolare

$$\mathbb{E}(X_n^\tau) = \mathbb{E}(X_{\tau\wedge n}) = \mathbb{E}(X_{n\wedge 0}) = \mathbb{E}(X_0)$$

DOMANDA: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingala. τ tempo di arresto con $\mathbb{P}(\tau<+\infty)=1$
Mi chiedo se è vero che

$$\mathbb{E}(X_\tau) \overset{?}{=} \mathbb{E}(X_0)$$

Questo non può essere vero, vediamo un controesempio.

CONTROESEMPIO: $\xi_1, \xi_2, \ldots$ $B(1, 1/2)$ indipendenti (passeggiata aleatoria simmetrica)
↳ non è vero, voglio che $\mathbb{P}(\xi_i = \pm 1) = 1/2$, cioè la sposto a valori in ± 1

$X_0 = 0, \ldots, X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$

$\tau = \min\{n : X_n = 1\}$

So che $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$ (perché la passeggiata aleatoria simmetrica è ricorrente)

Se valesse il ? sopra dovrei avere

$$1 = \mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0) = 0$$

↓ dato che τ è il minimo n tale che $X_n = 1$

TEO: (ARRESTO OPZIONALE - DOOB)
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo adattato e τ tempo di arresto con $\mathbb{P}(\tau<+\infty)=1$.
Allora X_τ è in L^1 se (X) è martingala, e inoltre vale che

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$$

se è vero una delle tre affermazioni:

(1) $\mathbb{P}(\tau\le k) = 1$ per un certo $k\in\mathbb{N}$
(2) $\exists Y$ v.a. $\in L^1$ t.c. $|X_{n\wedge\tau}| \le Y$ $\mathbb{P}$-q.c. $\forall n$
(3) $\mathbb{E}(\tau) < +\infty$ $|X_{n+1} - X_n| \le M$ $\mathbb{P}$-q.c. $\forall n$

dim: (1) Per $n > k$ allora $X_\tau = X_{n\wedge\tau}$

(2) $\mathbb{E}(X_{n\wedge\tau}) = \mathbb{E}(X_0)$ $\forall n$

$X_{n\wedge\tau} \longrightarrow X_\tau$ $\mathbb{P}$-q.c. $|X_{n\wedge\tau}| < Y \in L^1$

Lebesgue $\Rightarrow \mathbb{E}(X_{n\wedge\tau}) \longrightarrow \mathbb{E}(X_\tau)$ che quindi $= \mathbb{E}(X_0)$

(3) $X_{n\wedge\tau} = \sum_{k=1}^{\tau} (X_k - X_{k-1}) + X_0$

$|X_{n\wedge\tau}| \le \tau M + |X_0| =: Y \in L^1 \Rightarrow$ pto 2 ∎

OSS: Nelle hp (1), (2) e (3) se $(X)_n$ è solo supermartingala (sub) posso solo dedurre che $\mathbb{E}(X_\tau) \le \mathbb{E}(X_0)$
$(\ge)$

OSS: Se $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è supermartingala $X_n \geq 0$ $\forall n$ $\mathbb{P}$-q.c. e $\mathbb{P}(\tau<+\infty)=1$ allora

$$\mathbb{E}(X_\tau) \leq \mathbb{E}(X_0)$$

senza bisogno di altre ipotesi

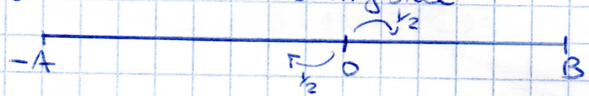
dim: $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(\underset{(\lim)}{\liminf_n} X_{\tau\wedge n}) \underset{\text{fatou}}{\leq} \liminf_n \mathbb{E}(X_{\tau\wedge n}) \leq \liminf_n \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_0)$ ■

APPLICAZIONE: (ROVINA del GIOCATORE SIMMETRICA)

$\xi_1, \xi_2, \ldots$ v.a. indip. $\mathbb{P}(\xi_i = \mp 1) = 1/2$

$X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ $\quad X_0 = 0$

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala



$(\tau^{A,B}=)\ \tau = \min\{n : X_n \in \{-A, B\}\}$ (tempo in cui arrivo o a $-A$ o a B)

devo mostrare che:

$\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$

altrimenti tocco B per forza (è una stima molto poco raffinata)

$\{\tau = +\infty\} \subset \{\xi_1 = 1, \ldots, \xi_{A+B} = 1\}^c \cap \{\xi_{A+B+1} = 1, \ldots, \xi_{2(A+B)} = 1\}^c \ldots$

$\forall k$ definisco $A_k = \{\xi_{k(A+B)+1} = 1, \ldots, \xi_{(k+1)(A+B)} = 1\}$

$\mathbb{P}(A_k) = (\frac{1}{2})^{A+B}$ $\quad$ $\{A_k\}$ famiglia indipendente

$\{\tau > (n+1)(A+B)\} \subset A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c$

$\mathbb{P}(\tau > (n+1)(A+B)) \leq \mathbb{P}(A_1^c) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n^c) = (1 - (\frac{1}{2})^{A+B})^n$

$\{\tau = +\infty\} \subseteq \{\tau > (n+1)(A+B)\}$ $\forall n$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\tau = +\infty) \leq (1 - (\frac{1}{2})^{A+B})^n$ $\quad \forall n$

$\mathbb{P}(\tau = +\infty) = 0$ (basta prendere n abb grande)

$|X_{n\wedge t}| \leq \max(A, B)$ $\Rightarrow$ posso applicare il teo $\Rightarrow \mathbb{E}(X_\tau) = 0$

ma $\mathbb{E}(X_\tau) = -A\,\mathbb{P}(X_\tau = -A) + B\,\mathbb{P}(X_\tau = B)$. Inoltre

$\mathbb{P}(X_\tau = -A) + \mathbb{P}(X_\tau = B) = 1$. Quindi otteniamo

$B\,\mathbb{P}(X_\tau = B) - A(1 - \mathbb{P}(X_\tau = B)) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X_\tau = B) = \frac{A}{A+B}$

(ovvero la prob che si rovini il giocatore B è $\frac{A}{A+B}$)

—— • ——

$\sigma = \min\{n : X_n = 1\}$

$\{\sigma < +\infty\} = \bigcup_{A\in\mathbb{N}} \{X_{\tau^{A,1}} = 1\}$ (dire che prima o poi passo da 1 vuol dire che prima o poi passo da 1 prima di passare da $-A$)

Infatti se $X_{\tau^{A,1}} = 1$ $\exists$ una traiettoria $X_0, \ldots, X_{\tau^{A,1}}$ che tocca 1, viceversa se $\exists X_0, \ldots, X_\sigma$ con $X_\sigma = 1$ e chiamo $A = -(\min_{k\leq\sigma} X_k) - 1$ per avere $-A <$ minimo

$\{X_{\tau^{A,1}} = 1\} \subset \{X_{\tau^{A+1,1}} = 1\} \Rightarrow \mathbb{P}(\sigma < +\infty) = \lim_{A\to\infty} \mathbb{P}(X_{\tau^{A,1}} = 1) = \lim_{A\to\infty} \frac{A}{A+1} = 1$

ESERCIZIO: Mostrare che $\mathbb{E}(\sigma) = +\infty$

LEMMA: τ t.a. $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), \mathbb{P})$ $\exists N, \varepsilon > 0$: $\mathbb{P}(\tau \leq N+n \mid \mathcal{F}_n) \geq \varepsilon$ $\mathbb{P}$-q.c. $\forall n$
(o $\mathbb{E}(I_{\{\tau \leq N+n\}} \mid \mathcal{F}_n) \geq \varepsilon$)
$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau) < +\infty$

dim: $\mathbb{P}(\tau > N) \leq 1-\varepsilon$ $\cdot = \mathbb{P}(\tau > N+0 \mid \mathcal{F}_0)$

$$\mathbb{P}(\tau > 2N) = \mathbb{P}(\tau > 2N, \tau > N) = \mathbb{P}(\tau > 2N \mid \tau > N) \cdot \mathbb{P}(\tau > N)$$

$\mathcal{F}_n$-mis

$$\stackrel{!}{=} \mathbb{P}(\tau > N+N \mid \mathcal{F}_n)\ \mathbb{P}(\tau > N)$$

$$\stackrel{!}{\leq} (1-\varepsilon)^2$$

Dico che $\mathbb{P}(\tau > kN) \leq (1-\varepsilon)^k$ $\forall k = 1, 2, \ldots$

$$\mathbb{E}(I_{\{\tau > kN\}}) = \mathbb{E}(I_{\{\tau > kN\}}\, I_{\{\tau > (k-1)N\}})$$

$$= \mathbb{E}(\mathbb{E}(I_{\{\tau > kN\}} I_{\{\tau > (k-1)N\}} \mid \mathcal{F}_{(k-1)N}))$$

$$\stackrel{!}{=} \mathbb{E}(I_{\{\tau > (k-1)N\}} \cdot \mathbb{E}(I_{\{\tau > kN\}} \mid \mathcal{F}_{(k-1)N}))$$

Applico il fatto che:

$$\mathbb{E}(I_{\{\tau \leq N+n\}} \mid \mathcal{F}_n) \geq \varepsilon \Rightarrow \mathbb{E}(I_{\{\tau > N+n\}} \mid \mathcal{F}_n) \leq (1-\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\tau > kN) \leq (1-\varepsilon) \cdot \mathbb{P}(\tau > (k-1)N)$$

Quindi otteniamo la formula per induzione dato che per $k=1$ è banale

Ricordo che $\mathbb{E}(\tau) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\tau > k)$ infatti

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau > k) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} 1\right) \mathbb{P}(\tau = n)$$

$$\stackrel{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}(\tau = n) = \mathbb{E}(\tau)$$

Noto che $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau > k) \stackrel{!}{\leq} N \cdot \sum_{h=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau > Nh)$

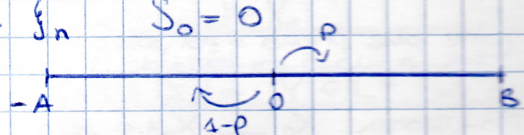
(dato che "raggruppo N pezzi" e gli do ogni volta il valore più grande)

$$\stackrel{!}{\leq} N \cdot \sum_{h=0}^{\infty} (1-\varepsilon)^h < +\infty \quad \blacksquare$$

ROVINA del GIOCATORE:

$\xi_1, \xi_2, \ldots$ v.a. indip $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(\xi_1 = -1) = 1-p$

$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ $\quad S_0 = 0$



$\tau^{A,B} = \min\{n : S_n \in \{-A, B\}\}$

$\mathcal{F}_n$ filtr. generata da $\xi_1, \ldots, \xi_n$

$\mathbb{E}(I_{\{\tau^{A,B} \leq N+n\}} \mid \mathcal{F}_n)$ prendo $N > A+B$

Noto che $\{\tau^{A,B} \leq N+n\} \supset \{\xi_{n+1}=1, \dots, \xi_{n+N}=1\}$

$\mathbb{E}(I_{\{\xi_{n+1}=1, \dots, \xi_{n+N}=1\}} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(\xi_{n+1}=1, \dots, \xi_{n+N}=1) = p^N \geq \varepsilon > 0$

$\Rightarrow$ posso applicare il lemma e quindi

$$\mathbb{E}(\tau^{A,B}) < +\infty \qquad \forall A, B$$

Ora vogliamo trovare da dove esco, ovvero se viene raggiunto A o B.
Voglio calcolare $\mathbb{E}(\tau^{A,B})$ e $\mathbb{P}(S_{\tau^{A,B}} = B) := b$
$(\mathbb{P}(S_{\tau^{A,B}} = -A) := a \rightarrow a+b=1)$

(1) CASO SIMMETRICO $(p=1/2)$

$\Rightarrow S_n$ è una martingala dato che $\mathbb{E}(\xi_i)=0$

$|S_{n \wedge \tau^{A,B}}| \leq \text{Max}(A,B)$ oppure $|S_{n+1} - S_n| \leq 1 \Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{A,B}) < +\infty$
Quindi posso usare il teorema di arresto opzionale

$$\Rightarrow \mathbb{E}(S_{\tau^{A,B}}) = 0$$

$S_{\tau^{A,B}} = -A\, I_{\{S_{\tau^{A,B}} = -A\}} + B\, I_{\{S_{\tau^{A,B}} = B\}}$

$\Rightarrow \mathbb{E}(S_{\tau^{A,B}}) = -A \cdot a + B \cdot b = 0$ inoltre $a+b=1$

$$\Rightarrow b = \frac{A}{A+B}, \quad a = \frac{B}{A+B}$$

Dobbiamo cercare un'altra martingala per trovare $\mathbb{E}(\tau^{A,B})$
Proviamo con S_n^2 e vediamo cosa succede

$X_n = S_n^2$

$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}((S_n + \xi_{n+1})^2 \mid \mathcal{F}_n) = \underbrace{\mathbb{E}(S_n^2 \mid \mathcal{F}_n)}_{X_n \text{ dato che è } \mathcal{F}_n\text{-mis}} + 2\,\mathbb{E}(\underbrace{S_n}_{\mathcal{F}_n\text{-mis}} \xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(\xi_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n)$

$$\overset{!}{=} X_n + 2 \underbrace{S_n \mathbb{E}(\xi_{n+1})}_{=0} + \underbrace{\mathbb{E}(\xi_n^2)}_{=1} = X_n + 1$$

$M_n = X_n - n \Rightarrow M_n$ è una martingala, infatti:

$\mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1} - (n+1) \mid \mathcal{F}_n) = X_n + \cancel{1} - n - \cancel{1} = X_n - n = M_n$

Ci piace tanto perché è saltato fuori n così magari se ci viene che funziona tutto riusciamo a calcolare $\mathbb{E}(\tau^{A,B})$
(lo facciamo passare da indice a sopra ☺)

Voglio applicare il teo di arresto opzionale

$|M_{n \wedge \tau}| \leq (\text{Max}(A,B))^2 + \tau^{A,B} = Y \in L^1 \Rightarrow$ Posso applicare T.A.O.

$\Rightarrow \mathbb{E}(M_{\tau^{A,B}}) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{A,B}) = \mathbb{E}(S^2_{\tau^{A,B}}) = A^2 \cdot a + B^2 \cdot b = \frac{A^2 B}{A+B} + \frac{B^2 A}{A+B}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{A,B}) = A \cdot B$$

ESERCIZIO: Vediamo l'esercizio dell'altra volta.

$\tau = \min\{n : S_n = 1\} \Rightarrow E(\tau) = +\infty$

Supponiamo p.a. $E(\tau) < +\infty$

$|S_{n+1} - S_n| \leq 1$ posso applicare doob

$\Rightarrow E(S_\tau) = 0$ Assurdo!

Dato che $S_\tau \equiv 1$ visto che $\tau = \min\{n : S_n = 1\}$

(2) CASO NON SIMMETRICO ($p \neq 1/2$)

Cambia tutto dato che S_n non è una martingala

$E(\xi_i) = p - (1-p) = 2p - 1$

considero $\tilde{\xi}_i = \xi_i - (2p-1) \Rightarrow E(\tilde{\xi}_i) = 0$

$\tilde{S}_n = \tilde{\xi}_1 + \dots + \tilde{\xi}_n$ è martingala

$\tilde{S}_n = S_n - n(2p-1)$

Posso applicare doob dato che:

$|\tilde{S}_{n \wedge \tau^{A,B}}| \leq \max(A,B) + \tau^{A,B} |2p-1| = Y \in L^1$

$\Rightarrow E(\tilde{S}_{\tau^{A,B}}) = 0 \Rightarrow E(S_{\tau^{A,B}}) = (2p-1) \cdot E(\tau^{A,B})$

$$\Rightarrow E(\tau^{A,B}) = \frac{-Aa + Bb}{2p-1}$$

Provo a costruire una martingala (martingala esponenziale)

$M_n = c^{\xi_1} \cdot \dots \cdot c^{\xi_n} \qquad M_0 = 1$

Devo avere che $E(c^{\xi_i}) = 1$ quindi $cp + c^{-1}(1-p) = 1$

$$\Rightarrow c = \frac{1-p}{p}$$

Notiamo che $p > 1/2 \Rightarrow c < 1 \qquad p < 1/2 \quad c > 1$

$M_n = c^{S_n} \Rightarrow |M_{n \wedge \tau^{A,B}}| = \begin{cases} c^{-A} & c < 1 \\ c^{B} & c > 1 \end{cases}$

$E(M_{\tau^{A,B}}) = 1$

$\Rightarrow E(M_{\tau^{A,A}}) = c^{-A} a + c^{B} b = 1$ e $a + b = 1$

$$\Rightarrow b = \frac{-c^{-A} + 1}{c^B - c^{-A}} \qquad a = \frac{c^B - 1}{c^B - c^{-A}}$$

(osserviamo che $a, b > 0$ ☺)

$$E(\tau^{A,B}) = \frac{1}{2p-1} \left[-A \cdot \frac{c^B - 1}{c^B - c^{-A}} + B \frac{1 - c^{-A}}{c^B - c^{-A}} \right]$$

ESEMPIO: TEMPO di PRIMO PASSAGGIO di una PASSEGGIATA ALEATORIA

$\tau = \min\{n : S_n = 1\}$

Voglio studiare $\mathbb{P}(\tau < +\infty)$. So che $\mathbb{E}|\tau| = +\infty$

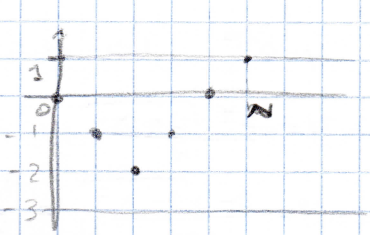
(ma questo non implica che $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 0$:))

$$\{\tau < +\infty\} = \bigcup_{A=1}^{\infty} \{S_{\tau_{A,1}} = 1\}$$

Infatti $\{S_{\tau_{A,1}} = 1\} \subset \{\tau < +\infty\}$ $\forall A$ (banale)

Per l'altra inclusione supponiamo che $\omega \in \{\tau < +\infty\}$

$\Rightarrow \exists N$ t.c. $S_N(\omega) = 1$



Chiamiamo $A := \left(\max_{k<N} (-S_k(\omega))\right) + 1$

Chiaramente $S_{\tau_{A,1}}(\omega) = 1$

Banalmente $\{S_{\tau_{A+1,1}} = 1\} \supset \{S_{\tau_{A,1}} = 1\}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\tau < +\infty) = \lim_{A\to\infty} \mathbb{P}(S_{\tau_{A,1}} = 1)$$

Quindi abbiamo:

(1) Caso Simmetrico: $\lim_{A\to\infty} \frac{A}{A+1} = 1$

(2) Caso Non Simmetrico: $\lim_{A\to\infty} \frac{1-c^{-A}}{c-c^{-A}}$ $\to$ $\frac{1}{c} = \frac{p}{1-p} < 1$ se $c>1$ $(p<\frac{1}{2})$; $\to 1$ se $c<1$ $(p>\frac{1}{2})$

ESERCIZIO: $p > \frac{1}{2}$, calcolare $\mathbb{E}(\tau)$

ESERCIZIO: Tasti a caso (26)

$X_i \in \{A, \ldots, Z\}$ a caso uniformemente

$\tau = \min\{n : X_{n-10} = A, X_{n-9} = B, \ldots, X_n = A\}$

τ è il ~~minimo~~ primo istante in cui la scimmia scrive ABRACADABRA

(1) $\mathbb{E}(\tau) < +\infty$ (verificare)

(2) $\mathbb{E}(\tau) = 26^{11} + 26^4 + 26$ (difficile)

(11)

18/04/2012

ESERCIZIO: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\xi_1, \xi_2, \ldots$ iid $\mathbb{P}(\xi_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$ $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$

$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ $S_0 = 0$

$\tau = \min\{n : S_n = 1\}$

Supponiamo che $\mathbb{E}(\tau) < +\infty$, vogliamo conoscere la legge di τ (i.e. $\mathbb{P}(\tau = k)$ $k = 1, 2, \ldots$)

Osserviamo che k pari $\Rightarrow \mathbb{P}(\tau = k) = 0$

In generale usiamo le martingale $M_n^\theta = [c(\theta)]^n e^{\theta S_n}$, $M_0^\theta = 1$, $\theta > 0$

Determiniamo $c(\theta)$ in modo che M_n^θ sia una martingala.

perché $\mathbb{E}(c(\theta)^n e^{\theta S_n}) = \prod \mathbb{E}(c(\theta) e^{\theta \xi_i})$

Deve essere $\mathbb{E}(c(\theta) e^{\theta \xi_1}) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} c(\theta) e^{\theta} + \frac{1}{2} c(\theta) e^{-\theta} = 1 \Rightarrow c(\theta) = \frac{2}{e^\theta + e^{-\theta}}$

La funzione $\xi \mapsto e^{\theta\xi}$ è convessa $\Rightarrow \mathbb{E}(e^{\theta\xi}) \geq e^{\theta \mathbb{E}(\xi)} = 1$

e quindi $c(\theta) \leq 1$.

(M_n^θ) è martingala. $0 \le M_{\tau \wedge n} \le e^\theta$, dal teo di arresto opzionale $E(M_\tau)=1$

$E(c(\theta)^\tau e^{\theta S_\tau}) = E(c(\theta)^\tau e^\theta) = 1 \Rightarrow E(c(\theta)^\tau) = e^{-\theta} \quad \forall \theta > 0$

Chiamo $x = c(\theta)$, $x \in (0,1)$ $\quad e^{-\theta} = f(x)$ (f analitica)

Ho che $E(x^\tau) = f(x) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x^k \, P(\tau = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k f(0)}{k!} x^k$

Ma allora $P(\tau = k) = \frac{D^k f(0)}{k!}$

$y = e^{-\theta}$, ho che $x = \frac{2}{y + y^{-1}} \Rightarrow xy^2 - 2y + x = 0$

$y = \frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x}$

$y = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$

e quindi otteniamo che

$x(0) = 1$

$e^{-\theta} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$ con $x = \frac{2}{e^\theta + e^{-\theta}}$ $\quad f(x) = \frac{x}{1-\sqrt{1-x^2}}$

Quindi se volessimo potremmo calcolare tutte le derivate fino alla k-esima per calcolare la prob con la formula

$P(\tau = k) = \frac{D^k f(0)}{k!}$ WOW :)

ESERCIZIO: $X_1, X_2, \dots$ indip. unif. in $\{A, \dots, Z\}$ (26 lettere)

$ABRACADABRA = \ell_1 \ell_2, \dots, \ell_{11}$

$\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \dots, X_n\}$

$\tau = \min\{n : X_{n-10} = A, \dots, X_n = A\}$
$\quad \overset{!}{=} \min\{n : X_{n-10} = \ell_1, \dots, X_n = \ell_{11}\}$

- τ è t.a.:

$\{\tau = k\} = \underbrace{\{X_{k-10} = \ell_1, \dots, X_k = \ell_{11}\}}_{\in \, \mathcal{F}_k} \cap \underbrace{\{\text{prima di } k \text{ non si scrive ABRACADABRA}\}}_{\in \, \mathcal{F}_k}$, perché dipende da $X_1, \dots, X_{k-1}$

- $P(\tau > n+11 \mid \mathcal{F}_n) \le P(\{X_{n+1} = \ell_1, \dots, X_{n+11} = \ell_{11}\}^c \mid \mathcal{F}_n)$

$\overset{!}{=} 1 - P(\{X_{n+1} = \ell_1, \dots, X_{n+11} = \ell_{11}\} \mid \mathcal{F}_n)$ $\quad$ indipendenza tra loro e da $\mathcal{F}_n$

$\overset{!}{=} 1 - P(X_{n+1} = \ell_1) \cdots P(X_{n+11} = \ell_{11})$

$\overset{!}{=} 1 - \left(\frac{1}{26}\right)^{11}$

$\Rightarrow P(\tau \le n+11 \mid \mathcal{F}_n) \ge \left(\frac{1}{26}\right)^{11} > 0$ $\Rightarrow$ posso applicare il lemma

$E(\tau) < +\infty$

- Calcoliamo $E(\tau)$:

se la scimmia fa giusto

Poniamo $M_0^\circ = 1$, $M_1^\circ = 26 \, I_{\{X_1 = \ell_1\}}, \dots, M_{11}^\circ = 26^{11} \, I_{\{X_1 = \ell_1, \dots, X_{11} = \ell_{11}\}}$

Se la scimmia sbaglia perdo tutto, $M_n^0 = M_{11}^0$ $\forall n > 11$ è costante

(M_n^0) è una martingala. Basta verificarlo per $n < 11$ dato che poi è costante.

$\forall k < 11$ $\quad M_{k+1}^0 = \underbrace{26\, I_{\{X_{k+1}=e_{k+1}\}}}_{(1)} \underbrace{M_k}_{(2)}$

(1) è indipendente da (2)

$\mathbb{E}(M_{k+1}^0 \mid \mathcal{F}_k) = \mathbb{E}(26\, I_{\{X_{k+1}=e_{k+1}\}} M_k^0 \mid \mathcal{F}_k) =$

$\stackrel{!}{=} M_k^0\, \mathbb{E}(26\, I_{\{X_{k+1}=e_{k+1}\}}) = \cancel{26} M_k^0 \cdot \frac{1}{\cancel{26}} = M_k^0 \implies$ è martingala

Poniamo:

$M_n^k = 1$ $\qquad$ se $n \le k$

$M_{k+1}^k = 26\, I_{\{X_{k+1}=e_1\}}$

$\vdots$ $\qquad$ $\Big\}$ $k+1 < n \le k+11$

$M_{k+11}^k = (26)^{11}\, I_{\{X_{k+1}=e_1, \dots, X_{k+11}=e_{11}\}}$

$M_n^k = M_{11}^k$ $\qquad$ se $n > k+11$

gioco di scommesse $\forall$ istante di partenza.

$\forall k \in \mathbb{N}$ $\quad (M_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ è martingala.

Metto insieme tutti questi giochi in un gioco di scommesse globale:

$$\tilde{Z}_n := \sum_{k=0}^{n} M_n^k$$

Non mi aspetto sia una martingala perché non è un gioco onesto, $\forall$ istante aggiungo un euro.

$Z_n = \sum_{k=0}^{n} M_n^k - n$ $\qquad M_0 = 1$

Verifichiamo che Z_n è martingala.

$\mathbb{E}(Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \sum_{k=0}^{n+1} \mathbb{E}(M_{n+1}^k \mid \mathcal{F}_n) - (n+1) =$

$\stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^{n+1} M_n^k - (n+1)$

$\stackrel{!}{=} \underbrace{\cancel{M_n^{n+1}}}_{=1} + \sum_{k=0}^{n} M_n^k - (n+\cancel{1}) = Z_n$

Voglio maggiorare $Z_{n+1} - Z_n$ così, dato che $\mathbb{E}(\tau) < +\infty$, posso applicare il teorema di arresto opzionale.

$|Z_{n+1} - Z_n| = \left| \sum_{k=0}^{n+1} M_{n+1}^k - \sum_{k=0}^{n} M_n^k - 1 \right| = \left| \cancel{M_{n+1}^{n+1}}^{=1} + \sum_{k=0}^{n} (M_{n+1}^k - M_n^k) - \cancel{1} \right|$

$\stackrel{!}{\le} \sum_{k=0}^{n} |M_{n+1}^k - M_n^k| \le 11 \cdot 26^{11} =$ costante

Applico Doob $\implies \mathbb{E}(Z_\tau) = 1$

$\mathbb{E}(Z_\tau) = \sum_{n=0}^{\tau} \mathbb{E}(M_\tau^n) - \mathbb{E}(\tau)$

Per $n < (\tau - 11)$ $\quad \mathbb{E}(M^n_\tau) = 0$ $\quad$ (avrei scritto prima ABRACADABRA)

Per $n = \tau - 11$ $\quad \mathbb{E}(M^n_\tau) = (26)^{11}$ $\quad$ (le ho indovinate tutte)

Per $n = \tau - 4$ $\quad \mathbb{E}(M^n_\tau) = (26)^4$

Per $n = \tau - 1$ $\quad \mathbb{E}(M^n_\tau) = 26$

Per $n = \tau$ $\quad \mathbb{E}(M^n_\tau) = 1$ $\quad$ per def.

e per $n \neq$ sono tutti nulli, infatti visto che il gioco si ferma a τ posso vincere scommettendo se $\tau - 10 \to$ indovino tutto ABRACADABRA $\tau - 3 \to$ indovino ABRA, τ indovino A

$$\cancel{1} = 26^{11} + 26^4 + 26 + \cancel{1} - \mathbb{E}(\tau)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau) = 26^{11} + 26^4 + 26$$

COMPORTAMENTO ASINTOTICO delle MARTINGALE

LEMMA: (di UPCROSSING - SCAVALCAMENTO)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\quad (\mathcal{F}_n)$ filtr. $\quad (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ supermartingala.
Fisso $a < b$, non scommetto fino a quando il prezzo scende sotto una quota minima (nel mio caso a)

$C_1 = I_{\{X_0 < a\}} = 1$ $\quad$ se $X_0 < a$

$$C_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{se } C_n = 1 \text{ e } X_n < b \text{ o } C_n = 0 \text{ e } X_n < a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$C_{n+1} = I_{\{C_n = 1\}} I_{\{X_n < b\}} + I_{\{C_n = 0\}} I_{\{X_n < a\}}$$

- C_n è prevedibile

dim: per induzione: C_1 è $\mathcal{F}_0$-misurabile
$\to C_{n+1}$ è $\mathcal{F}_n$-misurabile ■

- C_n è limitato e ≥ 0

Chiamo $Y = \int C \, dX$. Per definizione si ha che

$$Y_{n+1} - Y_n = C_{n+1}(X_{n+1} - X_n) \quad \text{e} \quad Y_0 = 0$$

(se sto scommettendo guadagno la variazione di martingala $X_{n+1} - X_n$ $[C_{n+1} = 1]$, se non scommetto non guadagno nulla)

La seguente relazione è la chiave della dim:

$$Y_N \geq (b-a) \cdot (\# \text{ di scavalcamenti della fascia } ab) - (X_N - a)^- \quad \forall N \geq 1$$

Scommetto appena scendo sotto a, poi seguo la traiettoria di X_n e mi fermo quando salgo sopra b.

def: $U^N_{[a,b]}$ = massimo # $r \in \mathbb{N}$ tale che $\exists\ 0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < \dots < t_r \leq N$ $s_i, t_i \in \mathbb{N}$
tali che $X_{s_i} < a$, $X_{t_i} \geq b$

(è il # di "scavalcamenti" della fascia ab)

$\Rightarrow$ $Y_N \geq (b-a)\, U^N_{[a,b]} - (X_N - a)^-$

ma Y_N è una supermartingala e parte da zero
$\Rightarrow$ $\mathbb{E}(Y_N) \leq 0$

Quindi:

$$0 \geq \mathbb{E}(Y_N) \geq (b-a)\, \mathbb{E}(U^N_{[a,b]}) - \mathbb{E}((X_N - a)^-)$$

LEMMA: (di UPCROSSING) $$\mathbb{E}(U^N_{[a,b]}) \leq \frac{\mathbb{E}((X_N-a)^-)}{b-a}$$

Ovvero il numero di scavalcamenti è dominato dal comportamento della martingala all'istante finale

OSS: Al crescere di N cresce il # di scavalcamenti

$$U^{N+1}_{[a,b]} \geq U^N_{[a,b]}$$

CORO: Se (X) è martingala limitata in L^1 (cioè $\sup_n \mathbb{E}(|X_n|) < +\infty$) def
allora $\forall a < b$

$$\mathbb{E}(\sup_N U^N_{[a,b]}) = \mathbb{E}(\lim_{N\to\infty} U^N_{[a,b]}) < +\infty$$

dim: $$\mathbb{E}(\lim_{N\to\infty} U^N_{[a,b]}) \overset{\text{CON. MONOTONA}}{=} \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}(U^N_{[a,b]})$$

$$\mathbb{E}(U^N_{[a,b]}) \leq \frac{1}{b-a}(\mathbb{E}(|X_N|) + a) \leq \text{cost}$$

convergono ad un # finito perché ho 1 succ. limitata e regolare ∎

Definiamo $U^\infty_{[a,b]} := \lim_{N\to\infty} U^N_{[a,b]}$

= Se X è superm. lim in L^1 allora $\exists X_\infty \in L^1$: $X_n \to X_\infty$ $\mathbb{P}$-q.c.

CORO: Se X è supermartingala limitata in L^1, allora ~~($\forall a<b$)~~ $\exists X_\infty\ (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(|X_\infty|) < \infty \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(\lim_{N\to\infty} X_N = X_\infty) = 1$$

X_N converge $\mathbb{P}$-q.c. a una cosa che sta in L^1. La stranezza è che ho tutto in L^1 ma non convergo in L^1 ma $\mathbb{P}$-q.c.

dim: $\Lambda = \{\omega : (X_n(\omega))$ non converge ad un limite in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\}$

$= \{\omega : \limsup X_n(\omega) > \liminf X_n(\omega)\}$

$\subset \bigcup_{\substack{a<b \\ a,b \in \mathbb{Q}}} \{\omega : \limsup X_n(\omega) > b,\ \liminf X_n(\omega) < a\}$

riesco a infilare 2 razionali nel mezzo

devo scavalcare ∞ volte ab $\subset \bigcup_{\substack{a<b \\ a,b \in \mathbb{Q}}} \{U^\infty_{[a,b]} = +\infty\}$

Λ è unione numerabile di insiemi di misura nulla $\Rightarrow \mathbb{P}(\Lambda) = 0$

Pongo $X_\infty = \limsup_n X_n = \lim_n X_n \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

X_∞ è misurabile $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$\mathbb{E}(|X_\infty|) = \mathbb{E}\big(\lim_{n\to\infty} |X_n|\big) \underset{\text{FATOU}}{\leq} \liminf_n \mathbb{E}(|X_n|) \underset{\text{per hp}}{\leq} \text{COST} < +\infty \quad \blacksquare$$

CORO: le martingale positive convergono sempre. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ supermartingala e $X_n \geq 0$ $\mathbb{P}$-q.c. allora $\exists X_\infty \in L^1$ t.c. $X_n \to X_\infty$ $\mathbb{P}$-q.c.

dim: $\mathbb{E}(|X_n|) = \mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X_0)$ $\blacksquare$

Perché non mi posso aspettare la convergenza in L^1?

CONTRO ESEMPIO: $\xi_1, \ldots$ indip. $\mathbb{P}(\xi_i = 0) = \mathbb{P}(\xi_i = 2) = 1/2$ (se indovino raddoppio la posta, se sbaglio perdo tutto)

$M_n = \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n \qquad M_0 = 1$

M_n è martingala (perché prodotto di v.a. indip. di media 1) e' $\geq 0 \Rightarrow$ è limitata in L^1

$\mathbb{P}(M_n \neq 0) = (1/2)^n \qquad \mathbb{P}(M_n = 0) = 1 - (1/2)^n$

una volta che tocco 0 non mi sollevo più!

$\mathbb{P}(M_k = 0 \quad \forall k \geq n) = 1 - (1/2)^n$

e dunque:

$$\mathbb{P}(M_k = 0 \text{ definitivamente}) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{M_k = 0 \ \forall k \geq n\}}_{\text{insiemi l'uno incluso nell'altro}}\Big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_k = 0 \ \forall k \geq n) = \lim_{n\to\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

Quindi $M_k \to 0$ $\mathbb{P}$-q.c. cioè $M_\infty = 0$

Ma $\mathbb{E}(|M_k - M_\infty|) = \mathbb{E}(M_k) = 1 \not\to \mathbb{E}(M_\infty) = 0$

OSS: $p > 1$

$$\mathbb{E}(M_n^p) = (\mathbb{E}(\xi_i^p))^n = \left(\frac{2^p}{2}\right)^n = 2^{n(p-1)}$$

$\to$ la martingala non è limitata in L^p, $p > 1$

Ho il sospetto che per avere la convergenza in L^1 non basta la limitatezza in L^1 ma vorrò avere la limitatezza in L^p per qualche $p > 1$.

TEO: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ supermartingala tale che $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n) < +\infty$ allora $\exists X_\infty \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tale che $X_n \to X_\infty$ $\mathbb{P}$-q.c.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $(\mathcal{F}_n)$ filtr. $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$ definisco

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma\{\mathcal{F}_n\} \subset \mathcal{F}$$

In generale non è vero che $X_n \to X_\infty$ in L^1

OSS: Se (X_n) è mart. e $X_n \to X_\infty$ in L^1 allora $X_n = \mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_n)$ $\forall n$ — imp

dim: So che $X_n = \mathbb{E}(X_{n+m} | \mathcal{F}_n)$ $\forall n \geq 0$ $\forall m \geq 0$
Vorrei poter passare al limite per $m \to \infty$ (...)
Abbiamo che vale il lemma:

LEMMA: La speranza condizionale è un funzionale continuo in L^1

dim: ~~$X \longrightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ è un'applicazione lineare~~
$L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$
verifico che è continua:

$$\|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\|_{L^1} = \mathbb{E}(|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|) \overset{\text{convessità di } |\cdot|}{\leq} \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X| \,|\, \mathcal{G})) = \mathbb{E}(|X|) = \|X\|_{L^1} \ \blacksquare$$

(...) per la continuità in L^1 $\mathbb{E}(X_{n+m} | \mathcal{F}_n) \xrightarrow{m\to\infty} \mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_n)$ $\blacksquare$

MARTINGALE in L^2

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. sia martingala e t.c. $\forall n$ $\mathbb{E}(X_n^2) < +\infty$

OSS: $n < m \leq r < s \in \mathbb{N}$

$$\langle X_m - X_n, X_s - X_r \rangle_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})} = 0$$

dim: Sto dicendo che $\mathbb{E}((X_m - X_n)(X_s - X_r)) = 0$

$$\mathbb{E}((X_m - X_n)(X_s - X_r)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}((X_m - X_n)(X_s - X_r) | \mathcal{F}_r)) = \mathbb{E}((X_m - X_n) \cdot \underbrace{\mathbb{E}((X_s - X_r) | \mathcal{F}_r)}_{\substack{\mathbb{E}(X_s|\mathcal{F}_r) - X_r \\ = X_r - X_r = 0}}) \ \blacksquare$$

CORO:
$$\mathbb{E}(X_{n+m} - X_n)^2 = \mathbb{E}\Big(\sum_{k=0}^{m-1} (X_{n+k+1} - X_{n+k})\Big)^2 = \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{E}(X_{n+k+1} - X_{n+k})^2$$
i doppi prodotti sono 0 per l'oss

In particolare:

$$\mathbb{E}(X_N^2) = \mathbb{E}\Big[\Big[X_0 + \sum_{k=0}^{N-1}(X_{k+1} - X_k)\Big]^2\Big) = \mathbb{E}\Big[2X_0 \sum_{k=0}^{N-1}(X_{k+1} - X_k) + X_0^2 + \Big(\sum_{k=0}^{N-1}(X_{k+1} - X_k)\Big)^2\Big]$$

$$= 2\sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\mathbb{E}(X_0 (X_{k+1} - X_k))}_{\mathbb{E}[X_0 \underbrace{\mathbb{E}(X_{k+1} - X_k | \mathcal{F}_0)}_{\substack{\mathbb{E}(X_{k+1}|\mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(X_k|\mathcal{F}_0) \\ = X_0 - X_0 = 0}}]} + \mathbb{E}(X_0^2) + \underbrace{\mathbb{E}((X_N - X_0)^2)}_{\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}((X_{k+1} - X_k)^2)}$$

① $\mathbb{E}(X_{n+m} - X_n)^2 = \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{E}(X_{k+1+n} - X_{k+n})^2$

② $\mathbb{E}(X_n)^2 = \mathbb{E}(X_0^2) + \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{E}(X_{k+1} - X_k)^2$

③ $\mathbb{E}(X_{n+m}^2) = \mathbb{E}(X_n^2) + \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{E}(X_{k+1+n} - X_{k+n})^2$

TEO: (X_n) martingala in L^2 allora

(1) $\sup_n \mathbb{E}(X_n^2) < +\infty \iff \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(X_{k+1}-X_k)^2 < +\infty$

(2) In questo caso $\exists X_\infty \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ tale che $X_n \to X_\infty$ in L^2 e $\mathbb{P}$-q.c.

(in L^2 significa che $\mathbb{E}(X_n - X_\infty)^2 \to 0$)

dim: (2) $\sup_n \mathbb{E}(X_n)^2 < +\infty \Rightarrow \sup_n \mathbb{E}(|X_n|) < +\infty \Rightarrow \exists! X_\infty \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ t.c.

$X_n \to X_\infty$ $\mathbb{P}$-q.c.

Resta da vedere che $X_\infty \in L^2$ e $X_n \to X_\infty$ in L^2

$\mathbb{E}((X_n - X_\infty)^2) = \mathbb{E}(\lim_{m\to\infty} (X_n - X_{n+m})^2)$

$\overset{!}{\leq} \liminf_{m\to\infty} \mathbb{E}((X_n - X_{n+m})^2)$

$\overset{!}{=} \liminf_m \sum_{k=n}^{m+n-1} \mathbb{E}(X_{k+1}-X_k)^2$ perché per 1 $\liminf = \lim$

$\overset{!}{=} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{E}(X_{k+1}-X_k)^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

perché $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(X_{k+1}-X_k)^2 < +\infty$ e quindi la coda $\to 0$ ∎

$\mathbb{E}(X_\infty^2) = \mathbb{E}((X_n - (X_n - X_\infty))^2$

$\leq \mathbb{E}(|X_n| + |X_n - X_\infty|)^2$

$= \mathbb{E}(X_n^2) + 2\mathbb{E}(|X_n||X_n - X_\infty|)$

$+ \mathbb{E}(|X_n - X_\infty|^2)$

ESEMPIO: Somme di v.c. indipendenti

Sappiamo che $\sum \frac{1}{n} = +\infty$ mentre $\sum \frac{(-1)^n}{n} < +\infty$

Supponiamo di avere ε_i indipendenti $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$

$\sum_n \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge? $<$ $\mathbb{P}$-q.c. / con $\mathbb{P} = 0$

Situazione generale: $X_1, X_2, \ldots$ indipendenti $X_i \in L^2$ $\forall i$

$\mathbb{E}(X_i) = 0$ $\quad Var(X_i) = \sigma_i^2$ $\quad$ nel caso di prima $X_i = \frac{\varepsilon_i}{i}$ $\Rightarrow$ non sono iid in generale quindi

$M_n = X_1 + \ldots + X_n$. Voglio studiare la convergenza di M_n

TEO: (1) Se $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 < +\infty$ allora $M_n \to M_\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. e in L^2

(2) Se $\exists k > 0$ t.c. $\forall n$ $|X_n| \leq k$ $\mathbb{P}$-q.c. allora se (M_n) converge ($\mathbb{P}$-q.c.)

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 < +\infty$

dim: (1) (M_n) è una martingala

Inoltre $\forall n$ $M_n \in L^2$ perché è somma di v.a. di L^2

So che se $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}((M_{n+1}-M_n)^2) < +\infty$ allora $M_n \to M_\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. e in L^2

Ma $M_{n+1} - M_n = X_{n+1} \Rightarrow \overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(X_{n+1}^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{n+1}^2$

dato che $\mathbb{E}(X_n) = 0$ $\forall n$

(2) $\mathbb{E}((M_{k+1} - M_k)^2 | \mathcal{F}_k) = \mathbb{E}(M_{k+1}^2 | \mathcal{F}_k) - 2\mathbb{E}(M_{k+1}M_k | \mathcal{F}_k) + M_k^2$

$\overset{!}{=} \mathbb{E}(M_{k+1}^2 | \mathcal{F}_k) - 2M_k \underbrace{\mathbb{E}(M_{k+1} | \mathcal{F}_k)}_{M_k} + M_k^2$

$\overset{!}{=} \mathbb{E}(M_{k+1}^2 | \mathcal{F}_k) - M_k^2$

Ma $\mathbb{E}((M_{k+1}-M_k)^2 \mid \mathcal{F}_k) = \mathbb{E}(X_{k+1}^2 \mid \mathcal{F}_k) \overset{\text{indip}}{=} \mathbb{E}(X_{k+1}^2) = \sigma_{k+1}^2$

Otteniamo che: $\sigma_{k+1}^2 + M_k^2 = \mathbb{E}(M_{k+1}^2 \mid \mathcal{F}_k)$

Se $A_n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$ poniamo $N_n = M_n^2 - A_n$

non è una v.a. quindi posso toglierlo dalla media

$\mathbb{E}(N_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(M_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n) - A_{n+1}$

$\overset{!}{=} M_n^2 + \sigma_{n+1}^2 - A_{n+1} = M_n^2 - A_n = N_n$!!

$\Rightarrow (N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala

Fisso c e pongo $\tau = \min\{n : |M_n| > c\}$

$\mathbb{E}(N_{n\wedge\tau}) = 0$ ma è anche

A_n è deterministico ma $A_{n\wedge\tau}$ ~~no~~ perché τ non è deterministico

$\hookrightarrow = \mathbb{E}(M_{n\wedge\tau}^2) - \mathbb{E}(A_{n\wedge\tau})$

$|M_{n\wedge\tau}| \le \underset{\wedge\, c}{|M_{n\wedge\tau-1}|} + \underbrace{|M_{n\wedge\tau-1} - M_{n\wedge\tau}|}_{=|X_{n\wedge\tau}| \le k}$

$\Rightarrow \mathbb{E}(A_{n\wedge\tau}) \le (c+k)^2$

$\Rightarrow \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n\wedge\tau} \sigma_k^2\right) \le (c+k)^2 < \infty$

Se $\exists\, c : \tau = +\infty$ con $\mathbb{P} > 0$ $\quad (\mathbb{P}(\tau = +\infty) > 0)$

$\Rightarrow A_{n\wedge\tau} \to \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2$

e quindi otteniamo $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < +\infty$

Se M_n converge $\mathbb{P}$-q.c. allora $\exists\, c$ t.c. $\mathbb{P}(|M_n| \le c \;\; \forall n) > 0$

e quindi abbiamo finito. (perché per questo c $\mathbb{P}(\tau = +\infty) > 0$) ∎

COROLLARIO: ε_i v.a. indipendenti con $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. $(a_n) \in \mathbb{R}^+$ succ.

$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i$ converge $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < +\infty$

Altrimenti la serie oscilla. (e ha limsup $= +\infty$ e liminf $= -\infty$)

(13)

27/04/2012

ESERCIZIO: (ε_i) indipendenti $\quad \mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i \qquad a_i \ge 0 \quad |a_n| \le \text{cost}$

S_n converge $\mathbb{P}$-q.c. e in L^2 sse $\sum a_n^2 < +\infty$

Se non converge $(\sum a_n^2 = +\infty)$, può succedere

(1) $\limsup S_n = \liminf S_n = \begin{matrix} +\infty \\ (-\infty) \end{matrix}$

(2) $\limsup S_n > \liminf S_n$

La prima osservazione che facciamo è che (1) è un evento coda, ovvero è misurabile rispetto a $\bigcap_{n=1}^{\infty} (\sigma\{\varepsilon_{n+1}, \ldots\})$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ con $A = \{\limsup S_n = \liminf S_n = +\infty\}$

Dico che non può essere $\mathbb{P}(A) = 1$

$\mathcal{L}(S_n) = \mathcal{L}(-S_n)$ perché $\mathcal{L}(\varepsilon_i) = \mathcal{L}(-\varepsilon_i)$

$\Rightarrow \mathcal{L}(\limsup S_n) = \mathcal{L}(\limsup(-S_n)) = \mathcal{L}(-\liminf(S_n))$

Se $\mathbb{P}(A) = 1$ $\limsup(S_n) = +\infty$ e $-\liminf(S_n) = -\infty$
e quindi ho un assurdo.

$\Rightarrow \sum \frac{\xi_i}{i}$ converge $\mathbb{P}$-q.c. perché $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ converge

TEO: $X_1, X_2, \ldots$ indip. $\mathbb{E}(X_i) = 0$, $\mathbb{E}(X_i^2) < +\infty$
$S_n = X_1 + \ldots + X_n$ $S_0 = 0$

(1) Se $\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{E}(X_i^2) < +\infty$ allora S_n converge $\mathbb{P}$-q.c.

(2) Se $\exists\, k$ t.c. $\forall i$ $\mathbb{P}(|X_i| \leq k) = 1$ e S_n converge $\mathbb{P}$-q.c. allora
$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{E}(X_i^2) < +\infty$$

(teo già visto) Ora vorrei migliorare questo risultato. Per prima cosa vorremmo togliere che le medie sono nulle

OSS: Se le X_i non sono centrate ma

$\sum_i \mathbb{E}(X_i) < +\infty$ e $\sum_i Var(X_i) < +\infty$
$\Rightarrow S_n$ converge $\mathbb{P}$-q.c.

dim: $\tilde{X}_i = X_i - \mathbb{E}(X_i)$
$\mathbb{E}(\tilde{X}_i) = 0$ e $\mathbb{E}(\tilde{X}_i^2) = Var(X_i)$

il teo ci dice che $\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{X}_i$ converge $\mathbb{P}$-q.c.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{X}_i}_{\text{converge}} = \sum_{i=1}^{\infty} X_i - \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_i)}_{\text{converge per hp}} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} X_i \text{ converge } \mathbb{P}\text{-q.c.}$$

■

PROP: X_n v.a. indip. $\mathbb{P}(|X_i| < k) = 1$ $\forall i$. Supponiamo $\sum_{i=1}^{n} X_i = S_n$ converga $\mathbb{P}$-q.c. allora

$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_i)$ e $\sum_{i=1}^{\infty} Var(X_i)$ convergono.

dim: Poniamo $\underbrace{\tilde{\Omega} = \Omega_1 \times \Omega_2}_{\text{copie degli } \Omega \text{ iniziali}}$ $\quad \tilde{\mathcal{F}}_n = \underbrace{\mathcal{F}_n^1 \otimes \mathcal{F}_n^2}_{\text{copie degli } \mathcal{F}_n \text{ iniziali}}$ $\quad \tilde{\mathbb{P}} = \underbrace{\mathbb{P}^1 \otimes \mathbb{P}^2}_{\text{copie delle } \mathbb{P} \text{ iniziali}}$

Costruisco: $\tilde{X}_n^1(\omega_1, \omega_2) = X_n^1(\omega_1)$ con X_n^1, X_n^2 copie di X_n
$\tilde{X}_n^2(\omega_1, \omega_2) = X_n^2(\omega_2)$

$\mathcal{L}^{\mathbb{P}}((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \mathcal{L}^{\tilde{\mathbb{P}}}((\tilde{X}_n^1)_{n\in\mathbb{N}}) = \mathcal{L}^{\tilde{\mathbb{P}}}((\tilde{X}_n^2)_{n\in\mathbb{N}})$ e (X_n^1) è indip da (X_n^2)

Consideriamo ora $Z_n = \tilde{X}_n^1 - \tilde{X}_n^2$

$\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}(Z_n) = \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}(\tilde{X}_n^1) - \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}(\tilde{X}_n^2) = \mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_n) = 0$

$Var^{\tilde{\mathbb{P}}}(Z_n) \underset{\text{indip}}{=} Var^{\tilde{\mathbb{P}}}(\tilde{X}_n^1) + Var^{\tilde{\mathbb{P}}}(\tilde{X}_n^2) = 2\, Var(X_n)$

$\{\sum_{i=1}^{\infty} Z_i \text{ converge}\} \supset \{\sum_{i=1} \tilde{X}_i^1 \text{ converge}\} \cap \{\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{X}_i^2 \text{ converge}\}$

$$\tilde{\mathbb{P}}\left(\sum_{i=1}^{\infty} Z_i \text{ converge}\right) \geq \overset{\text{indipendenza}}{\underbrace{\tilde{\mathbb{P}}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{X}_i^1 \text{ converge}\right)}_{=1 \text{ perché } \sum_{i=1}^{\infty} X_i \text{ converge } \mathbb{P}\text{-q.c.}} \cdot \underbrace{\tilde{\mathbb{P}}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{X}_i^2 \text{ converge}\right)}_{=1}}$$

$\tilde{\mathbb{P}}(|Z_i| < 2k) = 1$, $\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}(Z_i) = 0$, $Var^{\tilde{\mathbb{P}}}(Z_i) = \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}(Z_i^2) = 2\,Var(X_i)$

TEO PRECEDENTE $\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} Var(Z_i)$ converge

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} Var(X_i)$ converge

Resta da vedere che $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_i)$ converge

Definisco $\hat{X}_i = X_i - \mathbb{E}(X_i)$

$|\hat{X}_i| \leq 2k$ $\mathbb{P}$-q.c. , $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(\hat{X}_i^2) \overset{\text{per def}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} Var(X_i)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \hat{X}_i$ converge $\mathbb{P}$-q.c.

Dato che $\hat{X}_i = X_i - \mathbb{E}(X_i)$ passando alle serie so che $\sum \hat{X}_i$ e $\sum X_i$ convergono $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \hat{X}_i$ converge ■

TEO: (delle 3 serie di Kolmogorov)

X_n $n \in \mathbb{N}$ v.c. indip. $X_n \in L^2(\Omega, \mathbb{P})$ $\forall n$. Sono equivalenti

(A) $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ converge $\mathbb{P}$-q.c. (serie di v.c.)

(B) $\exists k > 0$ (e in quel caso vanno bene tutti $k > 0$) t.c. le serie

1) $\sum \mathbb{P}(|X_n| > k)$
2) $\sum \mathbb{E}(X_n^k)$
3) $\sum Var(X_n^k)$

convergono (serie di numeri) $\quad X_n^k = X_n \cdot \mathbb{I}_{\{|X_n| \leq k\}}$

dim: (B) $\Rightarrow$ (A)

Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > k)$ converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\underbrace{X_n^k \neq X_n}_{A_n \text{ sono eventi indipendenti}}) \text{ converge}$$

$\mathbb{P}(X_n^k \neq X_n$ per infiniti $n) = 0$ BOREL-CANTELLI

Quindi basta provare che $\sum_{n=1}^{\infty} X_n^k$ converge, ma questo segue da 2) e 3) e dai teoremi precedenti

(A) $\Rightarrow$ (B)

Supponiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ converga $\mathbb{P}$-q.c.

Fissato k qualsiasi > 0

$$\mathbb{P}(\underbrace{|X_n| > k}_{C_n \text{ indip.}} \text{ per } \infty\ n) = 0$$

Per Borel-Cantelli $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > k)$ converge $\Rightarrow$ vale 1)

$\mathbb{P}(X_n^k \neq X_n$ per $\infty\ n) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X_n^k = X_n$ definitivamente$) = 1$

$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n^k \text{ converge}\right) = 1 \Rightarrow \sum X_n^k$ converge $\mathbb{P}$-q.c. $+ |X_n^k| \leq k$

per i teoremi precedenti abbiamo che valgono 2) e 3) ■

LEMMA: (KRONECHER) $b_n \nearrow +\infty$, $b_n \in \mathbb{R}^+$, (x_n) successione di numeri, $s_n = x_1 + \dots + x_n$

Se $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x_n}{b_n}\right)$ converge $\Rightarrow$ $\frac{s_n}{b_n}$ ammette limite

ESERCIZIO: (Y_n) v.a. iid $\mathbb{P}(Y_n \in \{1/2, 2\}) = 1$

$Z_n = \prod_{i=1}^{n} Y_i \quad Z_0 = 0$

(1) Determinare la legge (Y_n) in modo che Z sia Martingala

Devo imporre che $\mathbb{E}(Y_n) = 1$ quindi se $p = \mathbb{P}(Y_n = 2)$

$2p + \frac{1}{2}(1-p) = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{3}$

(2) Provare che $\lim_{n\to\infty} Z_n \ \exists$ $\mathbb{P}$-q.c.

Dal teorema noto perché (Z_n) formano una martingala ≥ 0

$\Rightarrow$ mart. limitata in L^1.

(3) Provare che $Z_n \to 0$ $\mathbb{P}$q.c. (suggerimento: considerare $W_n = \log Z_n$)

$Z_n = \exp(W_n)$

$W_n = \log Y_1 + \dots + \log Y_n$

So che $\frac{W_n}{n} \longrightarrow \mathbb{E}(\log Y_1)$ $\mathbb{P}$-q.c.

$\mathbb{E}(\log Y_1) = (\log 2)\frac{1}{3} + \log\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3} = -\frac{1}{3}\log 2 < 0$

$\Rightarrow W_n \to -\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. dato che $\frac{W_n}{n}$ converge a un numero negativo

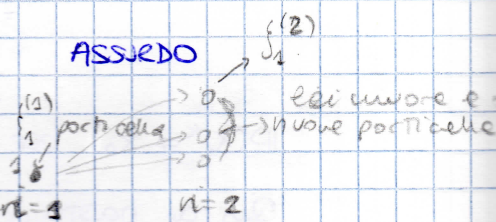
$\Rightarrow \exp(W_n) \to 0$ $\mathbb{P}$-q.c. $\Rightarrow Z_n \to 0$ $\mathbb{P}$-q.c.

(4) Dedurre che $(\mathbb{E}(Z_n^2))$ non è limitata.

Se lo fosse allora $Z_n \to 0$ $\mathbb{P}$-q.c. e in L^2

$\mathbb{E}(Z_n) \longrightarrow \mathbb{E}(0) = 0 \qquad \mathbb{E}(Z_n) \leq (\mathbb{E}(Z_n^2))^{1/2}$

D'altraparte Z_n martingala $\Rightarrow \mathbb{E}(Z_n) = 1$ ASSURDO



ESERCIZIO: (PROCESSO di GALTON-WATSON)

$(\xi_i^{(n)}\ n \in \mathbb{N}\ i \in \mathbb{N})$ iid $\xi_i^{(n)}$ a valori in $\mathbb{N}$

$\mathbb{E}(\xi_i^{(n)}) > 1$ e $\xi_i^{(n)} \in L^2$ $\qquad \mu = \mathbb{E}(\xi_i^{(n)}) \qquad \sigma^2 = Var(\xi_i)$

$n \to$ # di generazione

$i \to$ numero della particella

$Z_n = \#$ particelle all'istante n

$Z_0 = 1$

$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} \xi_i^{(n)}$

$\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_i^{(m)}, m \leq n, i \in \mathbb{N}\}$

(1) Provare che $\frac{Z_n}{\mu^n} = M_n$ è martingala

Z_n è $\mathcal{F}_n$-misurabile (per ricorrenza)

$\mathbb{E}(Z_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} Z_n I_{\{Z_{n-1}=k\}} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} (\xi_1^{(n)} + \dots + \xi_k^{(n)}) I_{\{Z_{n-1}=k\}} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)$

$= \sum_{k=0}^{\infty} I_{\{Z_{n-1}=k\}} \mathbb{E}(\underbrace{\xi_1^{(n)} + \dots + \xi_k^{(n)} \mid \mathcal{F}_{n-1}}_{\text{indipendenti}}) = \sum_{k=0}^{\infty} I_{\{Z_{n-1}=k\}} \mu k = \mu Z_{n-1}$

$\Rightarrow M_n$ è martingala

(2) Provare che $\mathbb{E}(M_n^2) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(M_{k+1} - M_k)^2$ già visto, vale in generale per le martingale

(0) Provare che $\exists$ $\mathbb{P}$-q.c. $\lim_{n\to\infty} M_n = M_\infty$

(3) Provare che $\mathbb{E}((M_{k+1} - M_k)^2 | \mathcal{F}_k) = \frac{\sigma^2 M_k}{\mu^{k+2}}$

(4) Dedurre che $M_n \to M_\infty$ in L^2. (viene automaticamente da (4))

(14)

02/05/2012

(2) Abbiamo già visto che:

$$\mathbb{E}(M_n^2) = \mathbb{E}\Big(\big(\underbrace{1 + \sum_{k=1}^{n} (M_k - M_{k-1})}_{\text{tutti ortogonali in } L^2}\big)^2\Big)$$

tutti ortogonali in L^2 $\Rightarrow$ otteniamo il risultato

(0) Segue immediatamente da (1)

(3) $\mathbb{E}((M_k - M_{k-1})^2 | \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{E}\Big(\Big(\frac{Z_k}{\mu^k} - \frac{Z_{k-1}}{\mu^{k-1}}\Big)^2 \Big| \mathcal{F}_{k-1}\Big)$

$$= \frac{1}{\mu^{2k}} \cdot \mathbb{E}((Z_k - \mu Z_{k-1})^2 | \mathcal{F}_k)$$

$$= \frac{1}{\mu^{2k}} \cdot \mathbb{E}\Big(\sum_{m=0}^{\infty} (Z_k - \mu Z_{k-1})^2 I_{\{Z_{k-1} = m\}} \Big| \mathcal{F}_{k-1}\Big)$$

$$= \frac{1}{\mu^{2k}} \cdot \mathbb{E}\Big(\sum_{m=0}^{\infty} \Big(\sum_{l=0}^{m} \xi_l^{(k)} - \mu m\Big)^2 I_{\{Z_{k-1} = m\}} \Big| \mathcal{F}_{k-1}\Big)$$

freezing

$$= \frac{1}{\mu^{2k}} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} I_{\{Z_{k-1} = m\}} \cdot \underbrace{\mathbb{E}\Big(\Big(\sum_{l=0}^{m} \underbrace{(\xi_l^{(k)} - \mu)}_{\tilde{\xi}_l^k}\Big)^2\Big)}$$

$= \operatorname{Var}\Big(\sum_{l=0}^{m} \tilde{\xi}_l^{(k)}\Big) = m\sigma^2$ perché sono iid e a media nulla dato che $\mathbb{E}(\xi) = \mu$

$$= \frac{1}{\mu^{2k}} \sum_{m=0}^{+\infty} I_{\{Z_{k-1} = m\}} \cdot \sigma^2 m = \frac{\sigma^2}{\mu^{2k}} \cdot Z_{k-1} = \frac{\sigma^2}{\mu^{2k}} \cdot M_{k-1} \cdot \mu^{k-1} = \frac{\sigma^2}{\mu^{k+1}} M_{k-1}$$

In particolare $\mathbb{E}(M_k - M_{k-1})^2 = \frac{\sigma^2}{\mu^{k+1}} \cdot \underset{\substack{\| \\ 1 \text{ perché martingala}}}{\mathbb{E}(M_{k-1})} = \frac{\sigma^2}{\mu^{k+1}}$

(4) $\mathbb{E}(M_n^2) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma^2}{\mu^{k+1}} = 1 + \frac{\sigma^2}{\mu^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu^{k-1}} \leq 1 + \frac{\sigma^2}{\mu^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\mu}}$ ($< \infty$ dato che $\mu < 1$)

(5) Calcolare $\mathbb{E}(M_\infty)$. Abbiamo che $M_n \to M_\infty$ in L^2

$$|\mathbb{E}(M_n) - \mathbb{E}(M_\infty)| = |\mathbb{E}(M_n - M_\infty)| \leq \mathbb{E}(|M_n - M_\infty|) \leq \mathbb{E}((M_n - M_\infty)^2)^{1/2} \to 0$$

(in realtà basta osservare che $\mathbb{E}$ è un funzionale lineare su L^1)

$\mathbb{E}(M_\infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(M_n) = 1$ (dato che $\mathbb{E}(M_n) = 1 \; \forall n$)

OSSERVIAMO CHE QUESTO IMPLICA CHE:

$$\frac{Z_n}{\mu^n} \to M_\infty \quad \text{con } \mathbb{E}(M_\infty) = 1 \quad \mathbb{P}\text{-q.c. e in } L^2$$

In questo caso $\mu < 1 \Rightarrow$ la popolazione si estingue, $\mu > 1$ cresce all'∞.

Somma di v.a. indipendenti

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ succ di v.a. indipendenti, $X_n \in L^2 \ \forall n$. Abbiamo visto che:

(1) Se $\mathbb{E}(X_n)=0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n^2) < +\infty$

$\Rightarrow S_n = \sum_{\ell=1}^{n} X_\ell$ si ha che $S_n \longrightarrow S_\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. e in L^2

(2) Se $|X_n| < K$ $\mathbb{P}$-q.c. $\forall n$ e $S_n \longrightarrow S_\infty$ $\mathbb{P}$-q.c.

$\Rightarrow \sum \mathbb{E}(X_n^2)$ converge

(3) Teorema delle 3 serie.

Poi abbiamo visto il lemma di Kronecker (di teoria dei numeri):

$b_n \nearrow +\infty$, $b_n \in \mathbb{R}^+$, (x_n) succ, $s_n = x_1 + \dots + x_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x_n}{b_n}\right) < +\infty \Rightarrow \exists$ finito il limite di $\frac{s_n}{b_n}$

A noi in particolare interesserà il caso $b_n = n$.

CORO: $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ succ di v.a. ind in L^2 con $\mathbb{E}(W_n)=0 \ \forall n$, e chiamiamo $S_n = W_1 + \dots + W_n$. Se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(W_n^2)}{n^2}$ converge la successione $\frac{S_n}{n}$ ammette limite finito $\mathbb{P}$-q.c. $(=0)$

dim: Prendo $b_n = n$. Basta provare che converge $\mathbb{P}$-q.c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n}{n}$

Basta che valga $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\left(\frac{W_n}{n}\right)^2\right)$ converga (per (1)) ok

$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \text{cost}$ $\mathbb{P}$-q.c. (per il lemma $\{0,1\}$ di Kolmogorov)

~~No~~ è immediato che $\text{cost} = 0$. per il lemma della pag dopo ∞

$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$ e è misurabile rispetto alla σ-algebra coda $\bigcap_{m=1}^{\infty} \sigma(W_{m+1}, \dots)$

In particolare $F_\ell(t) = \mathbb{P}(\ell \le t) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ (funz di ripartiz.)

$\Rightarrow \mathcal{L}_\ell = \delta_{\{a\}} \overset{?}{\Rightarrow} \ell = 0$ (lo mostro dopo perché ci deve pensare) ∎

TEO: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v.a. iid e in L^1. Chiamiamo $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ e $\mu = \mathbb{E}(X_k)$.

Allora $\frac{S_n}{n} \longrightarrow \mu$ $\mathbb{P}$-q.c.

LEMMA: $Y_n = X_n I_{\{|X_n| \le n\}}$, X_n iid e in L^1, $\mathcal{L}(X_n) = \mathcal{L}(X)$. Allora valgono:

(1) $\mathbb{E}(Y_n) \longrightarrow \mathbb{E}(X)$

(2) $\mathbb{P}(Y_n = X_n$ definitivamente $) = 1$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(Y_n)}{n^2} < +\infty$

dim: $\tilde{Y}_n = Y_n - \mathbb{E}(Y_n)$
(TEO)

$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \tilde{Y}_k$

Se $\frac{\tilde{S}_n}{n}$ converge $\mathbb{P}$-q.c. $\overset{a\ 0}{\ }$ converge anche $\frac{S_n}{n}$ $\overset{a\ \mu}{\ }$ (e tra l'altro allo stesso limite)

Infatti: $\frac{S_n}{n} = \frac{X_1+\dots+X_n}{n}$ $\quad \frac{\tilde{S}_n}{n} = \overbrace{\frac{Y_1+\dots+Y_n}{n}}^{\mathrm{I}} + \overbrace{\frac{\mathbb{E}(Y_1)+\dots+\mathbb{E}(Y_n)}{n}}^{\mathrm{II}}$

Per il lemma $X_n = Y_n$ $\mathbb{P}$-q.c. per il lemma (definitivo)

inoltre $\frac{\mathbb{E}(Y_1)+\dots+\mathbb{E}(Y_n)}{n} \longrightarrow \mathbb{E}(X)$ (convergenza secondo cesaro)

se $\frac{\tilde{S}_n}{n}$ ha limite, dato che la seconda parte converge,

ha limite anche $\frac{Y_1+\dots+Y_n}{n}$.

Ma dato che def $Y_n = X_n \Rightarrow$ anche $\frac{S_n}{n}$ ha limite.

Quindi ci basta dimostrare che $\frac{\tilde{S}_n}{n}$ converge.

Per il coro dato che

$$\sum \frac{Var(Y_n)}{n^2} < +\infty \quad e \quad \sum \frac{Var(Y_n)}{n^2} = \sum \frac{\mathbb{E}(\tilde{Y}_n^2)}{n^2}$$

se ci metto o no le tilde non cambio, dato che ho solo tolto la media

$\Rightarrow \frac{\tilde{S}_n}{n}$ converge $\mathbb{P}$.q.c. a zero.

in realtà non serve dato che $\frac{\tilde{S}_n}{n} \to 0 \Rightarrow \mathrm{I} \to \mu$

So che $\frac{S_n}{n} \longrightarrow \ell$ $\mathbb{P}$-q.c.. Dalla legge debole so che

$\frac{S_n}{n} \longrightarrow \mu$ in probabilità $\Rightarrow \ell = \mu$ $\mathbb{P}$-q.c. (per unicità del limite in probabil.) ∎

LEMMA: $(x_n) \subset \mathbb{R}$, $s_n = x_1 + \dots + x_n$. Se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$ converge $\Rightarrow \frac{s_n}{n} \longrightarrow 0$

dim: Uso il teorema di cesaro:

se $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_1+\dots+a_n}{n} = \ell$

Chiamo $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k} \Rightarrow \frac{x_n}{n} = u_n - u_{n-1}$ $\quad (u_0 = 0)$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{x_k}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\,(u_k - u_{k-1}) = u_1 - \underbrace{u_0}_{=0} + 2u_2 - 2u_1 + 3u_3 - 3u_2 + \dots + n\cdot u_n$$

$$= -u_1 - u_2 - \dots - u_{n-1} + n \cdot u_n$$

$$\frac{s_n}{n} = u_n - \Big(\sum_{k=1}^{n-1} u_k\Big)/n$$

So che $\exists$ finito $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$

$$\frac{s_n}{n} = \underset{\downarrow\,\ell}{u_n} - \underset{\downarrow\,\ell\ \text{per cesaro}}{\frac{u_1+\dots+u_{n-1}}{n-1}} \cdot \underset{\downarrow\,1}{\frac{n-1}{n}} \longrightarrow 0$$

∎

dim: (1) Fissiamo X con $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X_n)$ $\forall n$

(LEMMA) Y_n ha la stessa legge di $X I_{\{|X|\le n\}} = Z_n$

$\Rightarrow \mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(X \cdot I_{\{|X|\le n\}}) \longrightarrow \mathbb{E}(X)$ per conv. dominata

infatti:

$|X \cdot I_{\{|X|\le n\}}| \le |X|$ $\quad X I_{\{|X|\le n\}} \xrightarrow{n\to\infty} X$ $\mathbb{P}$-q.c.

(2) $\mathbb{P}(Y_n \ne X_n) = \mathbb{P}(|X_n| > n) = \mathbb{P}(|X| > n)$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y_n \ne X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X| > n) = \mathbb{E}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} I_{\{|X|>n\}}\Big) = \mathbb{E}\Big(\sum_{1\le n\le |X|} 1\Big) \le \mathbb{E}(|X|) < +\infty$$

(3) $\sum \frac{Var(Y_n)}{n^2} = ?$

So che $0 \leq Var(Y_n) \leq \mathbb{E}(Y_n^2)$ quindi basta provare che converge $\sum \frac{\mathbb{E}(Y_n^2)}{n^2}$

inutile scriverlo così

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(Y_n^2)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(X^2 I_{\{|X| \leq n\}})}{n^2} = \mathbb{E}\left(\lim_{n\to\infty} X^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{I_{\{|X|\leq k\}}}{k^2}\right)$$

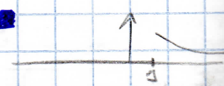
$$\overset{!}{=} \mathbb{E}\left(X^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{\{|X| \leq k\}}}{k^2}\right)$$

$$\overset{!}{=} \mathbb{E}(X^2 \cdot f(|X|)) \qquad \text{con } f(r) = \sum_{k \geq r}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

So che $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \rightarrow \frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)}$ $(k \geq 1)$

$$f(r) \leq \sum_{k \geq r}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)} = \frac{2}{r}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X^2 \cdot f(|X|)) \leq \mathbb{E}\left(X^2 \cdot \frac{2}{|X|}\right) = \mathbb{E}(2 \cdot |X|) < +\infty \quad ☺ \quad \blacksquare$$



ESERCIZIO: Su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ prendiamo X con legge assolutamente continua, di densità $f_X(t) = \frac{1}{t^2} I_{[1,+\infty)}(t)$

$Z_k = k \cdot I_{\{|X| > k\}}$ (con o senza = non cambia perché X è ass continua) $\quad Z_0 = 1$

$A_\ell = \{\ell - 1 \leq X < \ell\} \quad \ell = 1, \ldots$

$\mathcal{G}_k = \sigma(A_1, \ldots, A_k)$

(a) $\{X \geq k\}$ è $\mathcal{G}_k$-misurabile

$$\{X \geq k\} = \left(\bigcup_{\ell=1}^{k} \{\ell - 1 \leq X < \ell\}\right)^c = \left(\bigcup_{\ell=1}^{k} A_\ell\right)^c \in \mathcal{G}_k$$

$$\left(\overset{!}{=} (\{0 \leq X < k\})^c\right)$$

(b) Calcolare $\mathbb{E}(I_{\{X \geq k+1\}} \mid \mathcal{G}_k)$

$\mathcal{G}_k$ è generata dalla partizione $(A_2, \ldots, A_k, \{X \geq k\})$ ($\mathbb{P}(A_1) = 0$ quindi non mi serve)

$$\mathbb{E}(I_{\{X \geq k+1\}} \mid \mathcal{G}_k) = \cancel{\sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{E}^{P(\cdot|A_\ell)}(I_{\{X \geq k+1\}}) I_{A_\ell}} + \mathbb{E}^{P(\cdot|X \geq k)}(I_{\{X \geq k+1\}}) I_{\{X \geq k\}}$$

$= 0$ perché ℓ arrivo fino a k quindi $\mathbb{P}(X \geq k+1) = 0$

$$= \mathbb{P}(X \geq k+1 \mid X \geq k) \cdot I_{\{X \geq k\}}$$

$$\overset{!}{=} \frac{\mathbb{P}(X \geq k+1)}{\mathbb{P}(X \geq k)} \cdot I_{\{X \geq k\}}$$

$$\overset{!}{=} \frac{\int_{k+1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx}{\int_{k}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx} \cdot I_{\{X \geq k\}} = \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} \cdot I_{\{X \geq k\}} = \frac{k}{k+1} I_{\{X \geq k\}}$$

(c) Provare che (Z_n) è una martingala: (rispetto a $(\mathcal{G}_k)$)

$$\mathbb{E}(Z_{k+1} \mid \mathcal{G}_k) = k+1 \cdot \mathbb{E}(I_{\{|X| \geq k+1\}} \mid \mathcal{G}_k) = k \cdot I_{\{X \geq k\}} = Z_k$$

(d) Dimostrare che $Z_k \to 0$ $\mathbb{P}$-q.c.

$\mathbb{P}(Z_k = 0 \ \forall k > n) = \mathbb{P}(|X| \leq n)$

$\mathbb{P}(Z_k = 0 \text{ definitiv}) = \mathbb{P}(|X| \leq n \text{ per qualche } n) = \mathbb{P}(X < +\infty) = 1$ (posso toglierlo perché ≥0)

(e) Dire se è limitato in L^1 e in L^2

In L^1 sì perché è una martingala positiva

In L^2 no perché altrimenti $Z_n \to 0$ in L^2 e questo implicherebbe che $\mathbb{E}(Z_n) \to 0$ e questo non è vero. (15)

04/05/2012

TEO: (DECOMPOSIZIONE di DOOB)
(X_n) processo adattato, $X_n \in L^1 \ \forall n$ si può scrivere in modo unico

$$X_n = X_0 + M_n + A_n$$

dove M è una martingala, A prevedibile, $M_0 = A_0 = 0$ (altrimenti non ho l'unicità !!)

dim: Supponiamo $X_n = X_0 + M_n + A_n$ allora
→ generici, non sappiamo ancora che vale la tesi, li costruiamo in modo che valga

$X_n - X_{n-1} = (M_n - M_{n-1}) + (A_n - A_{n-1})$
M martingala sse

$\mathbb{E}(X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(A_n - A_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = A_n - A_{n-1}$ (perché A_n è $\mathcal{F}_{n-1}$ misurabile)

$\exists!$ processo A t.c. $A_0 = 0$ e vale $A_n = \mathbb{E}(X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) + A_{n-1}$
chiaramente A è prevedibile (per induzione)

Se poniamo $M_n = X_n - A_n - X_0$ ho $M_0 = 0$ e $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è martingala ∎

CORO: (X) è submartingala sse (A) è non decrescente (crescente in senso largo $\forall n$ $A_n \geq A_{n-1}$ $\mathbb{P}$-q.c.)

dim: $\mathbb{E}(X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = A_n - A_{n-1}$ ∎

CORO: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingala con $X_n \in L^2 \ \forall n$. Da Jensen segue che $(X_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ è una submartingala. Allora $\exists!$ martingala M_n e un processo prevedibile crescente in senso largo, tale che ($M_0 = 0$, $A_0 = 0$)

$$X_n^2 = X_0^2 + M_n + A_n \qquad (\text{i.e. } X_n^2 - A_n \text{ è martingala})$$

NOTAZ: $A_n = \langle X \rangle_n$ **VARIAZIONE QUADRATICA**

OSS: $A_n - A_{n-1} = \mathbb{E}(X_n^2 - X_{n-1}^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}((X_n - X_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1})$

OSS: Posso definire $A_\infty = \lim_{n\to\infty} A_n = \sup_n A_n$ a valori in $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$

ESEMPIO 1: Se $X_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ con $\xi_i \in L^2$ e $\mathbb{E}(\xi_i) = 0$ ξ_i ind. $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$

$A_n - A_{n-1} = \mathbb{E}((X_n - X_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(\xi_n^2)$ perché ξ_n e $\mathcal{F}_{n-1}$ indipendenti
$\stackrel{!}{=} \mathrm{Var}(\xi_n)$

$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(\xi_k)$ ⟹ in questo caso A è una successione di numeri e quindi è una cosa deterministica (in particolare è prevedibile)

ESEMPIO 2: $\xi_i \in \{-1,1\}$ con $\mathbb{P}(\xi_i = \pm 1) = 1/2$

$X_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$

$\Rightarrow X_n^2 - n$ è martingala $\quad (\mathrm{Var}\, \xi_i = 1)$

Osserviamo che nell'esempio 1 abbiamo che

$$A_\infty < +\infty \iff \sum \mathrm{Var}\,\xi_n < +\infty \text{ "}\iff\text{" } \exists \lim_{n\to\infty} X_n$$

TEO: (X_n) martingala con $X_n \in L^2\ \forall n$. Sia $(A_n) = \langle X \rangle_n$ la sua variazione quadratica ($X_n^2 - A_n$ mart.) e $A_\infty = \lim_{n\to\infty} A_n$. Allora

(1) $\lim_{n\to\infty} X_n \ \exists$ finito $\mathbb{P}$-q.c. su $\{A_\infty < +\infty\}$

(i.e. $\mathbb{P}(\{\nexists \lim_{n\to\infty} X_n\} \cap \{A_\infty < +\infty\}) = 0$)

(2) Se $\exists\, K$ t.c. $\forall n$ $\mathbb{P}(|X_n - X_{n-1}| > K) = 0$ allora $A_\infty < +\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. dove $\exists$ finito $\lim_{n\to\infty} X_n$

(i.e. $\mathbb{P}(\{A_\infty = +\infty\} \cap \{\exists \lim_{n\to\infty} X_n\}) = 0$)

dim: (1) Definiamo $\sigma^k = \min\{n : A_{n+1} > k\}$

σ^k è un tempo di arresto, dato che A_n è prevedibile ☺, infatti:
$\{\sigma^k = \ell\} = \{A_1 < k, \dots, A_\ell < k, A_{\ell+1} > k\} \in \mathcal{F}_\ell$

Sappiamo che $(X^2_{\sigma^k \wedge \ell} - A_{\sigma^k \wedge \ell})_\ell$ è martingala, perchè $X_\ell^2 - A_\ell$ è martingala e so che se arresto una martingala ottengo ancora una martingala.

Voglio verificare che $A_{\sigma^k \wedge \ell}$ resti prevedibile:

$$\{A_{\sigma^k \wedge \ell} \in B\} = \{\bigcup_{n=1}^{\ell-1} \underbrace{\{\sigma^k = n, A_n \in B\}}_{\in \mathcal{F}_{\ell-1}}\} \cup \{\sigma^k \geq \ell, \underbrace{A_\ell \in B}_{\text{è prevedibile} \Rightarrow \in \mathcal{F}_{\ell-1}}\}$$

$$\{\sigma^k \geq \ell\} = \left(\bigcup_{n=1}^{\ell-1} \{\sigma_k \leq n\}\right)^c \in \mathcal{F}_{\ell-1}$$

$\Rightarrow (A_{\sigma^k \wedge \ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ è prevedibile e $(X^2_{\sigma^k \wedge \ell} - A_{\sigma^k \wedge \ell})$ è una martingala

$\Rightarrow (A_{\sigma^k \wedge \ell})_{\ell \in \mathbb{N}} = \langle X^{\sigma^k} \rangle$

$$\mathbb{E}(X^2_{\sigma^k \wedge \ell} - X^2_{\sigma^k \wedge \ell - 1} \mid \mathcal{F}_{\ell-1}) = A_{\sigma^k \wedge \ell} - A_{\sigma^k \wedge (\ell-1)}$$
(numbla, perchè non è $(\sigma^k \wedge \ell) - 1$)

$$\mathbb{E}(X^2_{\sigma^k \wedge n}) = \mathbb{E}\left(\sum_{\ell=1}^{n} (X^2_{\sigma^k \wedge \ell} - X^2_{\sigma^k \wedge (\ell-1)})\right) + \mathbb{E}(X_0^2)$$

$$\overset{!}{=} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{\ell=1}^{n} (X^2_{\sigma^k \wedge \ell} - X^2_{\sigma^k \wedge (\ell-1)}) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)\right) + \mathbb{E}(X_0^2)$$

$$\overset{!}{=} \mathbb{E}\left(\sum_{\ell=1}^{n-1} (X^2_{\sigma^k \wedge \ell} - X^2_{\sigma^k \wedge (\ell-1)}) + \underbrace{\mathbb{E}(X_{n \wedge \sigma^k} - X_{(n-1)\wedge \sigma^k} \mid \mathcal{F}_{n-1})}_{A_{n\wedge\sigma^k} - A_{(n-1)\wedge\sigma^k}}\right) + \mathbb{E}(X_0^2)$$

procedendo allo stesso modo otteniamo:

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X^2_{\sigma^k \wedge n}) = \mathbb{E}\left(\sum_{\ell=1}^{n} (A_{\ell \wedge \sigma^k} - A_{(\ell-1)\wedge \sigma^k})\right) + \mathbb{E}(X_0^2)$$

$$\overset{!}{=} \underbrace{\mathbb{E}(A_{n \wedge \sigma^k})}_{\leq k} + \mathbb{E}(X_0^2)$$

Quindi $(X^2_{n \wedge \sigma^k})$ è limitata in L^1 $\Rightarrow \exists \lim$ (finito) $\mathbb{P}$ q.c. (e in L^2) di $X^2_{n\wedge\sigma^k}$
$(X_{n \wedge \sigma^k})$ è lim in L^2

Osserviamo ora che $\{A_\infty < +\infty\} \subset \{\bigcup_{k=1}^{\infty} \{\sigma^k = +\infty\}\}$ ie. se $\{A_\infty < +\infty\}$ $\mathbb{P}$-q.c. posso trovare k t.c. $\sigma^k = +\infty$ $\Rightarrow X_{n \wedge \sigma^k} = X_n \quad \forall n$

Se $\sigma^k = +\infty \Rightarrow X_{n\wedge\sigma^k} = X_n$ e quindi ho finito ☺

(2) Ho che $\mathbb{P}(|X_{n+1} - X_n| > k) = 0 \quad \forall n$ e suppongo che

$$\mathbb{P}(A_\infty = +\infty, \sup_n |X_n| < +\infty) > 0$$

Definisco $\tau(c) = \min\{n : |X_n| > c\}$ e noto che

$$\{\sup_n |X_n| < +\infty\} \subseteq \bigcup_{c=1}^{+\infty} \{\tau(c) = +\infty\}$$

$$\mathbb{E}(X^2_{n\wedge\tau(c)} - A_{n\wedge\tau(c)}) = 0$$

$$|X^2_{n\wedge\tau(c)}| \le \begin{cases} |X_n^2| \le c^2 & \text{se } n < \tau(c) \\ (\underbrace{|X_{\tau(c)-1}|}_{\le c} + \underbrace{|X_{\tau(c)} - X_{\tau(c)-1}|}_{\le k})^2 & \text{se } n \ge \tau(c) \end{cases}$$

$\Rightarrow |X^2_{n\wedge\tau(c)}|$ è limitata da $(c+k)^2$. Quindi:

$$\mathbb{E}(A_{n\wedge\tau(c)}) \le (c+k)^2 \quad \forall c$$

Se $\exists c$ t.c. $\mathbb{P}(\underbrace{A_\infty = +\infty, \tau(c) = +\infty}_{L}) > 0$

$$A_{n\wedge\tau(c)} I_L = A_n I_L$$

e per Beppo Levi: $\mathbb{E}(A_n I_L) = +\infty \Rightarrow \mathbb{E}(A_{n\wedge\tau(c)}) \to +\infty$ ASSURDO ∎

TEO: Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una martingala in L^2 e sia $(A_n) = (\langle X\rangle_n)$ la variazione quadratica.
Allora $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{A_n} = 0$ $\mathbb{P}$-q.c. in $\{A_\infty = +\infty\}$

dim: $W_n = \int \frac{1}{1+A} dX$ ovvero $W_n - W_{n-1} = \frac{1}{1+A}(X_n - X_{n-1})$

c'è solo per non dover considerare il caso $A=0$ a parte

W_n è martingala e W_n è in L^2

$$\mathbb{E}((W_n - W_{n-1})^2 | \mathcal{F}_{n-1}) = \left(\frac{1}{1+A_n}\right)^2 \underbrace{\mathbb{E}((X_n - X_{n-1})^2 | \mathcal{F}_{n-1})}$$

$$= \mathbb{E}(X_n^2 - X_{n-1}^2 | \mathcal{F}_{n-1}) = A_n - A_{n-1}$$

$$\mathbb{E}((W_n - W_{n-1})^2 | \mathcal{F}_{n-1}) \le \frac{A_n - A_{n-1}}{(1+A_n)(1+A_{n-1})} = \frac{1}{1+A_{n-1}} - \frac{1}{1+A_n}$$

dato che $A_{n-1} < A_n$

$$\Rightarrow \langle W\rangle_n - \langle W\rangle_{n-1} \le \frac{1}{1+A_{n-1}} - \frac{1}{1+A_n}$$

$\Rightarrow \langle W\rangle_\infty \le 1$ $\mathbb{P}$-q.c. faccio lim $n\to\infty$ e viene $1 - \frac{1}{1+A_n} < 1$ ☺

Quindi $\lim_{n\to\infty} W_n$ $\exists$ finito $\mathbb{P}$-q.c. per il teo precedente.

Ma $W_n = \sum_{l=1}^{n} \frac{X_l - X_{l-1}}{1+A_l}$. Per il lemma di Kroneker W_n converge $\Rightarrow$

$$\frac{\sum_{l=1}^{n}(X_l - X_{l-1}) = X_n}{1+A_n} \longrightarrow 0 \quad \text{dove } \{A_\infty = +\infty\} \Rightarrow \frac{X_n}{A_n} \to 0$$ ∎

def: $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$, famiglia $(X_i)_{i\in I}$ v.a. $:(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P}) \to \mathbb{R}$. Dico che la famiglia è **UNIFORMEMENTE INTEGRABILE** se $\forall \varepsilon>0$ $\exists k>0$ t.c. $\forall i$
$$\mathbb{E}(|X_i| I_{\{|X_i|>k\}}) < \varepsilon$$

N.B. E' una condizione più forte della limitatezza in L^1. È più debole della lim. in ...

ESEMPIO: $\mathbb{P}(X_n = n) = 1/n$ $\quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$

lim in L^1
$\not\Rightarrow$ unif int

NON è una famiglia uniformemente integrabile.
$\mathbb{E}(X_n I_{\{X_n \geq k\}}) = \cancel{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n}}$ appena $n \geq k$ (comunque fisso k trovo un $n \geq k$ per cui $\mathbb{E}(\cdot) = 1 > \varepsilon$)

ESEMPIO 1: $\mathbb{E}(|X_i|^p) \leq \text{cost}$ $\quad \forall i \in I$ $\quad p>1$

limitata in L^p $\Rightarrow$ unif int $(p>1)$

Allora $(X_i)_{i\in I}$ è una famiglia uniform. integr. Infatti:
$$\mathbb{E}(|X_i| I_{\{|X_i|\geq k\}}) \leq \mathbb{E}\left(|X_i| \cdot \frac{|X_i|^{p-1}}{k^{p-1}} I_{\{|X_i|\geq k\}}\right)$$
$$\leq \frac{1}{k^{p-1}} \cdot \mathbb{E}(|X_i|^p) \leq \frac{\text{cost}}{k^{p-1}}$$
Quindi $\forall \varepsilon$ trovo k che va bene $\forall i$:)

ESEMPIO 2: $\exists X \in L^1(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ t.c. $X \geq 0$ e $\mathbb{P}(|X_i| \leq X) = 1$
allora $(X_i)_{i\in I}$ è U.I.

$\mathbb{E}(|X_i| I_{\{|X_i| \geq k\}}) \leq \mathbb{E}(|X| I_{\{X \geq k\}})$ ← non dipende più da i :)

Ora basta far vedere che $\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}(X I_{\{X\geq k\}}) = 0$ ma questo segue dal teo. di Lebesgue perché $X \cdot I_{\{X\geq k\}} \leq X \in L^1$ e $\lim_{k\to\infty} X I_{\{X\geq k\}} = 0$ $\mathbb{P}$-q.c.

TEO: $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famiglia di v.a. reali in L^1, X v.a. in L^1. Sono equivalenti:

(1) $X_n \to X$ in L^1
(2) $X_n \to X$ in probabilità e $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una famiglia unif. int.

LEMMA: Y v.a. reale, $Y \geq 0$, $\mathbb{E}(Y) < +\infty$ (i.e. in L^1), $Y : (\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}^+$
Allora $\forall \varepsilon$ $\exists \delta$ t.c. $\forall A \in \mathcal{E}$ t.c. $\mathbb{P}(A) \leq \delta \Rightarrow \mathbb{E}(Y I_A) < \varepsilon$

dim: Supponiamo che $\exists \varepsilon_0 > 0$ t.c. $\forall \delta$ $\exists A$ t.c. $\mathbb{P}(A) \leq \delta$ e $\mathbb{E}(Y I_A) \geq \varepsilon_0$
Allora posso costruire una successione di $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c.
$\mathbb{P}(A_n) \leq \frac{1}{2^n}$ $\quad \mathbb{E}(Y I_{A_n}) \geq \varepsilon_0$

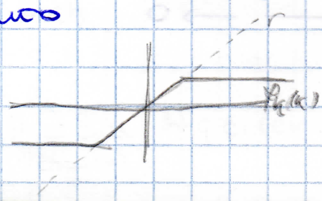
$\sum \mathbb{P}(A_n) < +\infty \Rightarrow \mathbb{P}\{\omega : \omega \in A_n \text{ per } \infty\ n\} = 0$ per Borel-Cantelli

$\Rightarrow Y I_{A_n} \to 0$ $\mathbb{P}$-q.c. e ovviamente $0 \leq Y I_{A_n} \leq Y$

Per Lebesgue $\mathbb{E}(Y I_{A_n}) \to 0$ ASSURDO ■

dim: (2) ⇒ (1)
(TEO) $\mathbb{E}(|X - X_n|) \xrightarrow{?} 0$
il guaio è quando le X_n diventano sempre più grandi in un intervallo piccolo ⇒ faccio un troncamento

$$\varphi_k(r) = \begin{cases} r & \text{per } r \in [-k, k] \\ k & \text{per } r > k \\ -k & \text{per } r < -k \end{cases}$$



Osserviamo che $\varphi_k(r) \neq r$ solo se $|r| > k$ e
$|\varphi_k(r) - r| \leq |r|$ (vedi sul disegno)

$\Rightarrow |\varphi_k(r) - r| \leq |r| \cdot I_{\{|r|>k\}}$

sommo e sottraggo $\varphi_k(X)$ e $\varphi_k(X_n)$ + dis triang

$$\mathbb{E}(|X - X_n|) \leq \mathbb{E}(|\varphi_k(X) - X|) + \mathbb{E}(|\varphi_k(X_n) - X_n|) + \mathbb{E}(|\varphi_k(X_n) - \varphi_k(X)|)$$

$$\leq \underbrace{\mathbb{E}(|X| I_{\{|X|>k\}})}_{\to 0 \text{ leb}} + \underbrace{\mathbb{E}(|X_n| I_{\{X_n \geq k\}})}_{\leq \varepsilon \text{ per U.I.}} + \mathbb{E}(|\varphi_k(X_n) - \varphi_k(X)|)$$

$\forall \varepsilon$ $\exists k$ suff. grande t.c. $\mathbb{E}(|\varphi_k(X) - X|) + \mathbb{E}(|\varphi_k(X_n) - X_n|) \leq 2\varepsilon$
Quindi mi resta solo il 3° termine. Dico che $\forall k$ fissato $\mathbb{E}(|\varphi_k(X_n) - \varphi_k(X)|) \longrightarrow 0$
Uso:
$a_n \to e$ sse da a_{n_k} posso estrarre $a_{n_{k_h}} \to e$

Da X_{n_k} estraggo $X_{n_{k_h}}$ t.c. $X_{n_{k_h}} - X \longrightarrow 0$ $\mathbb{P}$-q.c.

Da Lebesgue segue immediatamente che

$\mathbb{E}(|\varphi(X_{n_{k_h}}) - \varphi(X)|) \longrightarrow 0$ (n.b. $\varphi_k(r) \leq k$)

$\forall \varepsilon$ $\exists k : \forall n$ $\leq 2\varepsilon + \mathbb{E}(|\varphi_k(X_n) - \varphi(X)|)$

a questo punto è fissato

$\leq 3\varepsilon$ per n suff. grande

(1) $\Rightarrow$ (2)
Osservo che $\mathbb{E}(|X_n|) \leq$ cost.
Inoltre $\forall \delta$ $\exists k$ t.c. $\mathbb{P}(|X_n| \geq k) \leq \delta$ per markov
$\textcircled{\scriptsize{e}} \leq \frac{\mathbb{E}(|X_n|)}{k} \leq \delta$

$$\mathbb{E}(|X_n| I_{\{|X_n| \geq k\}}) \leq \mathbb{E}(|X_n - X| \cancel{I_{\{|X_n| \geq k\}}}) + \mathbb{E}(|X| \cdot I_{\{|X_n| \geq k\}})$$

tutto ≤ 1

$\forall \varepsilon$ $\exists N^\varepsilon$ t.c. $\mathbb{E}(|X_n - X|) \leq \varepsilon$ $\forall n \geq N^\varepsilon$
$\exists \bar{k}$ t.c $\forall k \geq \bar{k}$ t.c. $\mathbb{P}(|X_n| > k) \leq \delta_\varepsilon \underset{\text{LEMMA}}{\Longrightarrow} \mathbb{E}(|X| I_{\{|X_n| \geq k\}}) \leq \varepsilon$

$\mathbb{E}(|X_n| I_{\{|X_n| \geq k\}}) \leq 2\varepsilon$ per $n \geq N^\varepsilon$ e $k \geq \bar{k}$

So che $\mathbb{E}(|X_1| I_{\{|X_1| \geq k\}}) \xrightarrow{k \to \infty} 0$ e lo stesso fino a X_{N^ε}
(perché ho fissato la variabile al., deriva da Lebesgue)

Quindi $\exists \hat{k}$ t.c. $\forall n \leq N^\varepsilon$ $\mathbb{E}(|X_n| I_{\{|X_n| \geq k\}}) \leq \varepsilon$
(perché ho un # finito di v.a.)

Prendo $k = \max\{\bar{k}, \hat{k}\}$ ■

OSS: Se la successione $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è U.I. allora è limitata in L^1

dim: $\mathbb{E}(|X_n|) = \mathbb{E}(|X_n| I_{\{|X_n| \geq k\}}) + \underbrace{\mathbb{E}(|X_n| I_{\{|X_n| < k\}})}^{\leq k}$
$\forall \varepsilon$ (prendiamo $\varepsilon = 1$) $\exists k$ t.c. $\mathbb{E}(|X_n| I_{\{|X_n| \geq k\}}) \leq 1$
$\leq 1 + k$ ok ■

TEO: $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingala. Allora sono equivalenti:

(1) $\exists M_\infty \in L^1$ t.c. $M_n \to M_\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. e in L^1

(2) $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una famiglia U.I.

In questo caso $M_n = \mathbb{E}(M_\infty | \mathcal{F}_n)$.

dim: (1) $\Rightarrow$ (2)

Appena dimostrato.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Se $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è unif int. allora è limitata in L^1.

Allora $\exists M_\infty \in L^1$ t.c. $M_n \to M_\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. (1° teo di convergenza per le martingale)

$\Rightarrow M_n \to M_\infty$ anche in L^1 ($\mathbb{P}$-q.c. $\Rightarrow L^1$) per il TEO APPENA VISTO

Il fatto che $M_n = \mathbb{E}(M_\infty | \mathcal{F}_n)$ l'abbiamo già visto (segue dalla convergenza in L^1). pag 47 ■

OSS: il teo vale anche per super/sub martingale.

LEMMA: $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. $I = \{$tutte le sotto σ-algebre di $\mathcal{F}\}$. Consideriamo $(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))_{\mathcal{G}\in I}$. Questo è una famiglia U.I.

dim: $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \Rightarrow \mathbb{E}(|Y|) = \mathbb{E}(|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X||\mathcal{G})) = \mathbb{E}(|X|)$

$\Rightarrow$ la famiglia è limitata in L^1.

$\forall \delta \; \exists k$ t.c. $\mathbb{P}(|Y|>k) \leq \delta$ per ogni $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ (per markov) $\mathbb{P}(|Y|>k) \leq \frac{1}{k}\mathbb{E}(|Y|)$

questo non mi serve, dovrebbe esserci $|Y|$

$$\mathbb{E}(|X| I_{\{|Y|\geq k\}}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X| I_{\{|Y|\geq k\}} | \mathcal{G}))$$

$$\overset{!}{=} \mathbb{E}(I_{\{|Y|\geq k\}} \mathbb{E}(|X| | \mathcal{G}))$$

$$\overset{!}{\geq} \mathbb{E}(I_{\{|Y|\geq k\}} \cdot |\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|) = \mathbb{E}(I_{\{|Y|\geq k\}} |Y|)$$

questo è quello che mi serve

Per k abbastanza grande $\mathbb{P}(|Y|\geq k) \leq \delta$ e allora:

$$\mathbb{E}(|X| I_{\{|Y|\geq k\}}) \leq \varepsilon \overset{\text{e quindi}}{\Longrightarrow} \mathbb{E}(|Y| I_{\{|Y|\geq k\}}) \leq \varepsilon$$ ■

TEO: (LEVY-UPWARD) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\mathcal{F}_n$ filtrazione, $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Allora

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) \longrightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\infty) \quad \mathbb{P}\text{-q.c. e in } L^1$$

ove $\mathcal{F}_\infty = \sigma\{\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n\}$

dim: $(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala U.I.

Per il Teorema $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) \longrightarrow X_\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. e in L^1

So che X_∞ è per forza $\mathcal{F}_\infty$-misurabile (perché le X_n sono $\mathcal{F}_\infty$-misurabili, e X_∞ è limite delle X_n)

Resta da vedere che $X_\infty = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\infty)$.

Posso sempre supporre che $X \geq 0$ e $\mathbb{E}(X) = 1$. (Altrimenti divido in X^+ e X^- e moltiplico per costante)

(tanto tutto quello che uso è lineare ☺)

Noto che allora $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ sono v.a. di media 1 e ≥ 0
Questo mi dice che:
$$X_\infty \geq 0 \quad \mathbb{P}\text{-q.c.} \quad e \quad \mathbb{E}(X_\infty) = 1$$
(per la convergenza in L^1)

Se chiamo $Y_\infty = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\infty)$ allora so che
Y_∞ e $\mathcal{F}_\infty$-misurabile, $\mathbb{E}(Y_\infty) = 1$, $Y_\infty \geq 0$ $\mathbb{P}$-q.c

Devo far vedere che $\mathbb{P}(Y_\infty = X_\infty) = 1$
Equivale a far vedere che $\mathbb{E}((Y_\infty - X_\infty) I_A) = 0$ $\forall A \in \mathcal{F}_\infty$. Infatti
mostro che $\mathbb{P}(Y_\infty > X_\infty) = 0$ equivale a
faccio vedere che $\mathbb{P}(Y_\infty \geq X_\infty + 1/n) = 0$ $\forall n$, basta perché

$$\{Y_\infty > X_\infty\} = \bigcup_n \{Y_\infty \geq X_\infty + 1/n\}$$

$$0 = \mathbb{E}((Y_\infty - X_\infty) I_{\underbrace{\{Y_\infty \geq X_\infty + 1/n\}}_{\in \mathcal{F}_\infty}}) \geq \frac{1}{n} \mathbb{P}(Y_\infty \geq X_\infty + \frac{1}{n})$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(Y_\infty \geq X_\infty + 1/n) = 0$ ☺ (idem se inverto Y con X)

Cioè $\mathbb{E}(Y_\infty I_A) \overset{?}{=} \mathbb{E}(X_\infty I_A)$ $\forall A \in \mathcal{F}_\infty$ (devo mostrarlo)

Chiamo $\mathbb{P}^1(A) = \mathbb{E}(Y_\infty I_A)$ $\quad \mathbb{P}^2(A) = \mathbb{E}(X_\infty I_A)$
Devo far vedere che $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^2$ su $\mathcal{F}_\infty$
Noto che $\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n$ è un sistema di generatori chiuso per intersezione (p-system)

Quindi basta mostrare che $P^1(A) = P^2(A)$ $\forall A \in \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n$ (ho tolto la σ-)
Basta mostrare che:
$$\mathbb{E}(X_\infty I_A) = \mathbb{E}(Y_\infty I_A) \quad \forall A \in \mathcal{F}_{\bar n} \quad \text{per qualche } \bar n$$

Abbiamo che $X_\infty = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ $\mathbb{P}$-q.c. e in L^1

Se $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) \xrightarrow{L^1} X_\infty \Rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) I_A \xrightarrow{L^1} X_\infty I_A$ $\qquad X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$

$$\mathbb{E}(X_\infty I_A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n I_A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n I_A | \mathcal{F}_{\bar n}))$$
$$\overset{!}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(I_A \cdot \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{\bar n}))$$
se n abb. grande è martingala
$$\overset{!}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(I_A \cdot X_{\bar n}) = \mathbb{E}(I_A \cdot X_{\bar n})$$
$$\mathbb{E}(Y_\infty I_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y_\infty I_A | \mathcal{F}_{\bar n})) = \mathbb{E}(I_A \underbrace{\mathbb{E}(Y_\infty | \mathcal{F}_{\bar n})}_{\underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\infty)|\mathcal{F}_{\bar n})}_{\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{\bar n}) = X_{\bar n}}})$$
■

TEO: (LEVY - DOWNWARD) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $(\mathcal{G}_{-n})$ $\mathcal{G}_{-n} \subset \mathcal{F}$ $\mathcal{G}_{-(n+1)} \subset \mathcal{G}_{-n}$ σ-algebre
$X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$\Rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_{-n}) \to \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_{-\infty})$ $\mathbb{P}$-q.c. e in L^1

ove $\mathcal{G}_{-\infty} = \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{G}_{-n}$ non ho bisogno di scrivere $\sigma(\cap \mathcal{G}_{-n})$ perché l'intersez. di σ-Algebre è già una σ-algebra

dim: $M_n^N = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}_{-N+n})$ $\quad n \in \{0, N\}$ è una martingala lim. in L^1

$U_N[a,b] = \#$ scavalcamenti di $(M_n^N)_{n \in \mathbb{N}}$ di $[a,b]$ ho che

$\mathbb{E}(U_N(a,b)) \leq \text{cost}$

chiamo $U[a,b] = \#$ scavalcamenti che la succ. $(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}_{-n}))_{n \in \mathbb{N}}$ fa della striscia $[a,b]$.

$$U[a,b] = \lim_{N \to \infty} U^N[a,b] = \sup_N U^N[a,b]$$

$\Rightarrow \mathbb{E}(U[a,b]) < +\infty \quad \forall\, a,b \quad (a<b)$

$\Rightarrow \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}_{-n}) \longrightarrow X_{-\infty}$ $\mathbb{P}$-q.c. $\Rightarrow \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}_{-n}) \longrightarrow X_{-\infty}$ anche in L^1 perché è succ. U.I.

So che $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}_{-n}) \longrightarrow X_{-\infty}$ in L^1 e $\mathbb{P}$-q.c., resta da vedere che $X_{-\infty} = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}_{-\infty})$

$X_{-\infty}$ è misurabile rispetto a $\mathcal{G}_{-n}$ $(\forall n)$
Quindi $X_{-\infty}$ è $\mathcal{G}_{-\infty}$-misurabile

Resta da vedere che $\mathbb{E}(X_{-\infty} I_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}_{-\infty}) I_A) \quad \forall A \in \mathcal{G}_{-\infty}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{-\infty} I_A) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}_{-n}) I_A) \\
&\overset{!}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X I_A \mid \mathcal{G}_{-n})) \\
&\overset{!}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X I_A) = \mathbb{E}(X I_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}_{-\infty}) I_A) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

CORO: (L.F.G.N.) legge forte grandi numeri: $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iid $X_i \in L^1$ $\quad S_n = X_1 + \dots + X_n$

Allora $\frac{S_n}{n} \longrightarrow \mu$ $\mathbb{P}$-q.c. e in L^1 $\quad (\mu = \mathbb{E}(X_i))$

dim: $\mathcal{G}_{-n} = \sigma(S_n, S_{n+1}, \dots)$

Abbiamo dimostrato che $\mathbb{E}(X_1 \mid \mathcal{G}_{-n}) = \dots = \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{G}_{-n}) = \frac{S_n}{n}$

So che $\frac{S_n}{n} \longrightarrow \mathbb{E}(X_1 \mid \mathcal{G}_{-\infty})$ P-q.c. e in L^1

(dato che $\frac{S}{n} = \mathbb{E}(X_1 \mid \mathcal{G}_{-n})$)
Mi resta da vedere che il limite è una costante.

$L = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}\right)$ ha legge $\delta_{\{a\}}$ per la legge $\{0,1\}$ → rispetto alle σ-algebre gen. dalle X_n
per una certa $a \in \mathbb{R}$

So anche che $\frac{S_n}{n}$ converge al limite (L) in L^1, quindi

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) \longrightarrow \mathbb{E}(L)$$

$\Rightarrow \mathbb{E}(L) = \mu \Rightarrow L \sim \delta_{\{\mu\}}$ $\quad \blacksquare$

TEO: (DISUGUAGLIANZA MASSIMALE - DOOB)
$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ submartingala ≥ 0. Allora $\forall \lambda > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left[\sup_{0\leq k\leq n} Z_k\right] \geq \lambda\right) \leq \frac{\mathbb{E}(Z_n)}{\lambda}$$

Inoltre: $\mathbb{P}\left(\left[\sup_{0\leq k\leq n} Z_k\right] \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\left(Z_n I_{\{\sup_{0\leq k\leq n} Z_k \geq \lambda\}}\right)$

OSS: Se nella formula non ci fosse il sup ~~sarebbe~~ ci ridurremmo a Markov.

dim: $F = \{\sup_{k\leq n} Z_k \geq \lambda\} = F_0 \cup \dots \cup F_n$ ove
$F_0 = \{Z_0 \geq \lambda\}$ ... $F_n = \{Z_0 < \lambda, \dots, Z_{n-1} < \lambda, Z_n \geq \lambda\}$

$$\mathbb{E}(Z_n I_F) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}(Z_n I_{F_k}) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z_n I_{F_k} | \mathcal{F}_k)) =$$
$$\stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}(I_{F_k} \underbrace{\mathbb{E}(Z_n | \mathcal{F}_k)}_{\geq Z_k \text{ perché submart.}}) \geq$$
$$\stackrel{!}{\geq} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}(Z_k I_{F_k}) \geq \lambda \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}(I_{F_k}) =$$
$$= \lambda\, \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} F_k\right) = \lambda\, \mathbb{P}(F)$$

perché $Z_k \geq \lambda$ su F_k

La prima disuguaglianza è una forma più debole della seconda, e quindi segue da quella. ■

CORO: $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingala. φ funzione convessa e a valori in $\mathbb{R}^+$. Allora:

$$\mathbb{P}(\sup_{k\leq n} \varphi(M_k) \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(\varphi(M_n))$$

dim: $X_k = \varphi(M_k)$ allora (X_k) è submartingala e ≥ 0 ■

CORO: $X_1, \dots, X_n$ v.a. i.i.d., $\mathbb{E}(X_i) = 0$. Sia $S_n = X_1 + \dots + X_n$ (è martingala)
$\forall \theta > 0$ considero $Z_n = \exp(\theta S_n)$. (Z_n) è una submartingala ≥ 0
(dato che exp è funzione convessa.) Allora:

$$\mathbb{P}(\sup_{k\leq n} e^{\theta S_k} \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(e^{\theta S_n})$$

posso sempre scrivere $\lambda = e^{\theta c}$ $c \geq 0$ (per qualche $c \geq 0$)

$$\mathbb{P}(e^{\theta \sup_{k\leq n} S_k} \geq e^{\theta c}) \leq e^{-\theta c}\,\mathbb{E}(e^{\theta X_1} \cdots e^{\theta X_n}) \qquad \mathbb{E}(e^{\theta X_i}) = e(\theta)$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbb{P}(\sup_{k\leq n} S_k \geq c) \leq e^{-\theta c}(e(\theta))^n$$

indip

questo coro ci dice che gli eventi improbabili vanno a zero rapidamente

Supponiamo che $X_i \sim N(0,1)$.

$$e(\theta) = \mathbb{E}(e^{\theta X_1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\theta x} e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx$$
$$\stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2\theta x + \theta^2)} e^{\frac{1}{2}\theta^2}\,dx = e^{\frac{1}{2}\theta^2} \overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}\,dx}^{=1} = e^{\frac{1}{2}\theta^2}$$

Quindi otteniamo in questo caso:

$$\mathbb{P}(\sup_{k\leq n} S_k \geq c) \leq e^{-\theta c + \frac{1}{2}\theta^2 n} = e^{-\frac{1}{2}c^2/n}$$

θ è arbitrario, quindi posso scegliere quello che minimizza il secondo membro
$\Rightarrow \theta = c/n$

LEMMA: X, Y v.a ≥ 0. Supponiamo che $\forall c$ $\mathbb{P}(X \geq c) \leq \frac{1}{c} \mathbb{E}(Y I_{\{X \geq c\}})$
Allora $\forall p > 1$:
$$\mathbb{E}(X^p) \leq q^p \mathbb{E}(Y^p) \qquad \text{se} \quad 1/p + 1/q = 1$$
(i.e. $\|X\|_{L^p} \leq q \|Y\|_{L^p}$)

dim: Poniamo
$$\ell = \int_0^{+\infty} p c^{p-1} \mathbb{P}(X \geq c)\, dc = \int_0^{+\infty} p c^{p-1} \mathbb{E}(I_{\{c \leq X\}})\, dc$$
$$= \int_0^{+\infty} \int_\Omega p c^{p-1} I_{\{c \leq X(\omega)\}}\, dc\, \mathbb{P}(d\omega)$$
$$= \int_\Omega \Big\{ \underbrace{\int_0^{+\infty} p c^{p-1} I_{\{c \leq X(\omega)\}}\, dc}_{\int_0^{X(\omega)} p c^{p-1} dc = (X(\omega))^p} \Big\} \mathbb{P}(d\omega)$$
$$= \int_\Omega X^p(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}(X^p)$$

$$\ell \leq \int_0^{+\infty} p c^{p-2} \mathbb{E}(Y I_{\{X \geq c\}})\, dc = \int_0^{+\infty} \int_\Omega p c^{p-2} Y(\omega) I_{\{c \leq X(\omega)\}}\, dc\, \mathbb{P}(d\omega)$$
$$= \int_\Omega Y(\omega) p \Big\{ \int_0^{X(\omega)} c^{p-2}\, dc \Big\} \mathbb{P}(d\omega)$$
$$= \int_\Omega Y(\omega) \overbrace{\frac{p}{p-1}}^{=q} X^{p-1}(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega)$$

Quindi abbiamo ottenuto:
$$\mathbb{E}(X^p) \leq q \mathbb{E}(Y X^{p-1}) \underset{\text{Holder}}{\leq} q (\mathbb{E}(Y^p))^{1/p} (\mathbb{E}(X^{(p-1)q}))^{1-\frac{1}{p}}$$
$$= q (\mathbb{E}(Y^p))^{1/p} (\mathbb{E}(X^p))^{1-1/p}$$

dividendo per $(\mathbb{E}(X^p))^{1-1/p}$ ottengo la tesi.

TEO: (DISUGUAGLIANZA L^p-DOOB) $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ submart. ≥ 0 e sia $Z^* = (\sup_n Z_n)$
Allora $\forall p > 1$
$$\mathbb{E}((Z^*)^p) \leq q^p \sup_n \mathbb{E}(Z_n^p)$$
In particolare se $\sup_n \mathbb{E}(Z_n^p) < +\infty$ allora $Z^* \in L^p$

CORO: se $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è martingala e $M^* = \sup_n (|M_n|)$ allora $\mathbb{E}((M^*)^p) \leq q^p \sup_n \mathbb{E}(|M_n|^p)$
In particolare $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata in L^p allora $M^* \in L^p$

dim: (CORO) $\varphi: x \to |x|$ è convessa $\Rightarrow Z_n = |M_n|$ è submartingala ≥ 0 ∎

dim: (TEO) So che $\mathbb{P}(\sup_{k \leq n} Z_k \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(Z_n I_{\{\sup_{k \leq n} Z_k \geq \lambda\}})$

Dal lemma segue che: $\qquad (X = \sup_{k \leq n} Z_k \;;\; Y = Z_n)$
$$\mathbb{E}((\sup_{k \leq n} Z_k)^p) \leq q^p \mathbb{E}(Z_n^p) \leq q^p \sup_n (\mathbb{E}(Z_n^p))$$

inoltre $\sup_{k \leq n} Z_k \nearrow Z^*$. Quindi per Beppo Levi:
$$\mathbb{E}((Z^*)^p) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}((\sup_{k \leq n} Z_k)^p) \leq q^p \sup_n (\mathbb{E}(Z_n^p))$$ ∎

p=1 non funziona, serve U.I.

CORO: $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingala limitata in L^p ($p>1$) [i.e. $\sup_n(\mathbb{E}(|M_n|^p)<+\infty$]
allora $\exists M_\infty \in L^p(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P})$ t.c. $M_n \longrightarrow M_\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. e in L^p

dim: L'unica cosa che rimane da dimostrare è la convergenza in L^p (il resto l'abbiamo già visto)

Poniamo $Z^* = \sup_{n\in\mathbb{N}}|M_n|$. So dalla dis L^p che $Z^*\in L^p$.
Ovviamente $|M_n| \le Z^*$ $(\forall n)$ p-q.c. So che $\exists M_\infty$ t.c. $M_n \to M_\infty$ $\mathbb{P}$-q.c (e in L^1)
$\Rightarrow |M_\infty| \le Z^* \Rightarrow M_\infty \in L^p$
Inoltre:

$$|M_n - M_\infty|^p \le 2^p (Z^*)^p \overset{Leb}{\Longrightarrow} \mathbb{E}(|M_n-M_\infty|^p) \longrightarrow 0 \quad \blacksquare$$

Avevamo visto che: (M_n) martingala, τ tempo di arresto sotto certe ipotesi: $\mathbb{E}(M_\tau) = \mathbb{E}(M_0)$
Vogliamo esaminare ora le "certe ipotesi". Mostreremo che queste certe ipotesi si riducono a $M_{\tau\wedge n}$ U.I.

def: **σ-ALGEBRE degli EVENTI ANTECEDENTI A un TEMPO di ARRESTO:**
$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ filtr. τ tempo di arresto. Dico che $A\in\mathcal{F}_\tau$ se $\forall n \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ $A\cap\{\tau=n\}\in\mathcal{F}_n$ (ie $\mathcal{F}_\tau = \{A\in\mathcal{F}$ t.c. $A\cap\{\tau=n\}\in\mathcal{F}_n\ \forall n\}$)
(con $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n)$, τ ha valori in $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$)

OSS: $\{\tau=+\infty\}\in\mathcal{F}_\infty$ infatti
$\{\tau=+\infty\} = (\bigcup_{n=1}^\infty \{\tau=n\})^c \in \mathcal{F}^\infty$ ☺

("ci serve affinché τ sia tempo di arresto", di solito si chiede solo $\{\tau=n\}\in\mathcal{F}_n$) — è più comodo

OSS: $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\infty$

dim: Sia $A\subset\mathcal{F}_\tau$

$$A = (\bigcup_{n=1}^\infty A\cap\{\tau=n\}) \cup (A\cap\{\tau=\infty\}) \in \mathcal{F}_\infty \quad \blacksquare$$

ESERCIZIO:
- Verificare che se τ è deterministico (i.e. $\tau\equiv n$) allora $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_n$ e se $\tau\equiv+\infty \Rightarrow \mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_\infty$
- Verificare che $\mathcal{F}_\tau$ è una σ-algebra

PROP: Se $\sigma\le\tau$ allora $\mathcal{F}_\sigma\subseteq\mathcal{F}_\tau$
(altrimenti avrei sbagliato a dare il nome ☺, perché dice che gli eventi antecedenti a σ sono meno di quelli antecedenti a τ)

dim: $A\in\mathcal{F}_\sigma$ devo mostrare che $A\in\mathcal{F}_\tau$

$$A\cap\{\tau=n\} = A\cap\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}\{\sigma=k\}\right)\cap\{\tau=n\}$$
$$\overset{!}{=} \bigcup_{k=0}^{n}\Big[\underbrace{(A\cap\{\sigma=k\})}_{\in\mathcal{F}_k}\cap\underbrace{\{\tau=n\}}_{\in\mathcal{F}_n}\Big] \in \mathcal{F}_n \quad \blacksquare$$

PROP: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo adattato (X_∞ - $\mathcal{F}_\infty$ misurabile) allora X_τ è $\mathcal{F}_\tau$-misurabile.
(definisco per non occuparmi di $\tau=\infty$)

dim: $X_\tau = (\sum_{n=0}^{\infty} X_n I_{\{\tau=n\}}) + X_\infty I_{\{\tau=+\infty\}}$ Devo far vedere che $\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\{X_\tau\in B\}\in\mathcal{F}_\tau$

$\{X_\tau\in B\}\cap\{\tau=n\} = \{X_n\in B\}\cap\{\tau=n\}\in\mathcal{F}_n$ dato che τ è t.a. e X è adattato $\blacksquare$

PROP: τ tempo di arresto, $\tau \leq N$. Supponiamo $(X_n)_{n=0,1,\dots,N}$ sia una martingala (/sub martingala / super) allora $\mathbb{E}(X_N \mid \mathcal{F}_\tau) \overset{(\leq)}{\underset{(\geq)}{=}} X_\tau$ $\mathbb{P}$-q.c.

↳ ovvio ogni volta che ho speranze condiz.

dim: (sub martingala)
Devo far vedere che $\mathbb{E}(X_N \mid \mathcal{F}_\tau) \geq X_\tau$. Questo è equivalente a

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_N \mid \mathcal{F}_\tau) I_F) \geq \mathbb{E}(X_\tau I_F) \qquad \forall F \in \mathcal{F}_\tau$$

$$\mathbb{E}(X_N I_F) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_N \mid \mathcal{F}_\tau) I_F) \longleftarrow \text{dato che } F \in \mathcal{F}_\tau \text{ misurabile}$$

$$\sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}(X_N \underbrace{I_F I_{\{\tau=k\}}}_{I_{F\cap\{\tau=k\}} \in \mathcal{F}_k}) = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}(X_N I_{\{\tau=k\}\cap F}) = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{E}(X_N \mid \mathcal{F}_k)}_{\geq X_k} I_{\{\tau=k\}\cap F})$$

$\geq X_k$ perché sub mart.
$\leq$ se super, $=$ se mart.

$$\geq \sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}(X_k I_{\{\tau=k\}} I_F) = \mathbb{E}((\underbrace{\sum_{k=0}^{N} X_k I_{\{\tau=k\}}}_{X_\tau}) I_F) = \mathbb{E}(X_\tau I_F)$$

Allo stesso modo si mostra per martingale o superm. ■

TEO: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingala U.I. Sia τ tempo di arresto qualsiasi. Allora

$$\mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_\tau) = X_\tau$$

con $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ $\exists$ $\mathbb{P}$-q.c. e in L^1 (dato che (X_n) mart U.I.)

dim: Abbiamo che $X_k = \mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_k)$.
$\tau \wedge k$ è un tempo di arresto $\leq k$ e $\mathcal{F}_{\tau\wedge k} \subseteq \mathcal{F}_k$
$\Rightarrow$ posso usare il lemma precedente

$$\mathbb{E}(X_k \mid \mathcal{F}_{\tau\wedge k}) \overset{\text{prop}}{=} X_{\tau\wedge k}$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_k) \mid \mathcal{F}_{\tau\wedge k}) = \mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_{\tau\wedge k})$$

Quindi ora dobbiamo passare al limite per $k\to\infty$ dato che abbiamo mostrato che:

$$\mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_{\tau\wedge k}) = X_{\tau\wedge k} \quad \mathbb{P}\text{-q.c.}$$

Noto che basta trattare il caso $X_\infty \geq 0$ $\mathbb{P}$-q.c. (e quindi $X_k \geq 0$) dato che per linearità posso dividere in $X_k = X_k^+ - X_k^-$ e ovvie $X_\tau = X_\tau^+ - X_\tau^-$.

Come prima devo far vedere che $\overset{(**)}{\mathbb{E}}(\mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_\tau) I_F) = \mathbb{E}(X_\tau I_F)$ $\forall F \in \mathcal{F}_\tau$

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_\tau) I_F) \overset{\text{BEPPO-LEVI}}{=} \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_\tau) I_F I_{\{\tau\leq k\}}) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_\tau) I_{F\cap\{\tau=\infty\}})$$

$$\overset{!}{=} \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_\tau) I_{F\cap\{\tau\leq k\}} \mid \mathcal{F}_{\tau\wedge k})) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_\tau) I_{F\cap\dots}$$

Osservo che $F\cap\{\tau\leq k\} \in \mathcal{F}_{\tau\wedge k}$ infatti:

$$F\cap\{\tau\leq k\}\cap\{\underbrace{\tau\wedge k}_{=\tau} = n\} = F\cap\{\tau=n\} \in \mathcal{F}_n$$

$$\overset{!}{=} \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_{\tau\wedge k})}_{X_{\tau\wedge k}} I_{F\cap\{\tau\leq k\}}) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_\tau) I_{F\cap\{\tau=\infty\}})$$

$$= \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}(X_{\tau\wedge k} I_{F\cap\{\tau\leq k\}}) + \mathbb{E}(\dots)$$

$$\overset{!}{=} \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}(X_\tau I_{F\cap\{\tau\leq k\}}) + \mathbb{E}(\dots)$$

convergenza monotona

$$\overset{\uparrow}{=} \mathbb{E}(X_\tau I_{F\cap\{\tau<+\infty\}}) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_\tau) I_{F\cap\{\tau=+\infty\}}) \quad \in \mathcal{F}_\tau$$

$$= \mathbb{E}(X_\tau I_{F\cap\{\tau<+\infty\}}) + \mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{E}(X_\infty I_{F\cap\{\tau=+\infty\}} | \mathcal{F}_\tau)})$$

$$\mathbb{E}(X_\infty I_{F\cap\{\tau=+\infty\}}) = \mathbb{E}(X_\tau I_{F\cap\{\tau=+\infty\}})$$

$$= \mathbb{E}(X_\tau I_F) \qquad \forall F \in \mathcal{F}_\tau$$

Quindi abbiamo mostrato (**) e abbiamo finito. ■

CORO: σ t.a con $\sigma \leq \tau$. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia martingala U.I., $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$, allora

$$\mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$$

(Quindi la proprietà di martingala passa dai tempi di arresto costanti ai tempi di arresto generici → è una proprietà forte)

dim: $X_\tau = \mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_\tau)$, $X_\sigma = \mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_\sigma)$

$$\mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_\tau) | \mathcal{F}_\sigma) \overset{\text{prop. torre}}{=} \mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma \quad ■$$

CORO: $\sigma \equiv 0$ allora $\mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_0) = X_0$ e quindi $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$
(ovvero riotteniamo il teo di arresto opzionale di doob)

TEO: (di ARRESTO) (RIVISITATO) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mart UI allora $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$

OSS: Basta che $(X_{n\wedge\tau})_{n\in\mathbb{N}}$ sia U.I.

$$\parallel$$
$$(X^\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Infatti se applico la tesi a $(X^\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ottengo $\mathbb{E}(X^\tau_\tau) = \mathbb{E}(X^\tau_0)$, dove $X^\tau_\tau = X_\tau$ e $X^\tau_0 = X_0$, quindi $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$

ESERCIZIO: Verificare che le hp della versione precedente del teo di arresto opzionale rientrano in queste ((X_n) mart U.I. o $(X_{n\wedge\tau})$ mart U.I.)

OSS: (X_n) sottomartingala U.I., $\sigma \leq \tau$ allora $\mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) \geq X_\sigma$

dim: Usiamo la decomposizione di doob. $X_n = M_n + A_n + X_0$ con A crescente
Devo dimostrare che:

$$\mathbb{E}((M_\tau + A_\tau) - (M_\sigma + A_\sigma) | \mathcal{F}_\sigma) \geq 0$$

ovvero

$$\underbrace{\mathbb{E}(M_\tau - M_\sigma | \mathcal{F}_\sigma)}_{\substack{=0 \\ \text{per il teo}}} + \underbrace{\mathbb{E}(A_\tau - A_\sigma | \mathcal{F}_\sigma)}_{\substack{\geq 0 \text{ perché} \\ A \text{ crescente}}} \geq 0 \qquad \text{ok}$$

in realtà resta da far vedere che anche (M_n) è U.I. (x esercizio) ■

ESERCIZIO: (2009) $\Omega = \{1, 2, \dots\}$ $\quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ (insieme delle parti)

$$\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \qquad \mathcal{F}_n = \sigma(\{1\}, \_\_, \{n\})$$

$$X_n(\omega) = (n+1) I_{\{n+1, n+2, \dots\}} \qquad \to X_0 \equiv 1$$

(1) Dimostrare che $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\mathcal{F}_n$ è generata dalla partizione $\{\underset{A^n_1}{\{1\}}, \dots, \underset{A^n_n}{\{n\}}, \underset{A^n_{n+1}}{\{n+1, n+2, \dots\}}\}$ (partiz. di Ω) — compl. degli altri

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}^{\mathbb{P}(\cdot|A_k)}(X_{n+1}) I_{A_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}^{\mathbb{P}(\cdot|\{k\})}(X_{n+1}) I_{\{k\}} + \mathbb{E}^{\mathbb{P}(\cdot|\{n+1,\dots\})}(X_{n+1}) I_{\{n+1,\dots\}}$$

$$X_{n+1}(\omega) = (n+2) I_{\{n+2,\dots\}}(\omega)$$

Osserviamo che $\mathbb{P}(\cdot|\{k\}) = \delta_{k}$ quindi:

perché il primo pezzo fa zero!

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{P}(\cdot|\{n+1,\dots\})}((n+2) I_{\{n+2,\dots\}}(\omega)) I_{\{n+1,\dots\}}$$

$$= (n+2)\, \mathbb{P}(\underbrace{\{n+2,\dots\}}_{A} | \underbrace{\{n+1,\dots\}}_{B}) I_{\{n+1,\dots\}}$$

$$= (n+2) \frac{\mathbb{P}(\{n+2,\dots\})^{=A\cap B}}{\mathbb{P}(\underbrace{\{n+1,\dots\}}_{B})} I_{\{n+1,\dots\}}$$

$$= \cancel{(n+2)} \frac{1/\cancel{n+2}}{1/n+1} I_{\{n+1,\dots\}} = (n+1) I_{\{n+1,\dots\}} = X_n$$

(2) Vedere se c'è convergenza $\mathbb{P}$-q.c. delle $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Sì, perché è una martingala ≥ 0 e quindi limitata in L^1

(3) Dire se converge in L^1
→ o guardo a cosa converge e vedo se è possibile aver convergenza in L^1
→ verifico U.I.

Proviamo con U.I.:

$$\mathbb{E}(X_n I_{\{X_n \geq k\}}) = \mathbb{E}(X_n) \quad \text{se } n+1 \geq k$$
$$= 1 \not\to 0 \quad \text{non U.I.} \Rightarrow \text{non converge in } L^1$$

In realtà si vede che $X_n \to 0$ $\mathbb{P}$-q.c. e quindi non può convergere in L^1 perché altrimenti $\underbrace{\mathbb{E}(X_n)}_{=1} \to \mathbb{E}(0) = 0$ assurdo!

(4) Calcolare $\mathbb{E}(\sup_n X_n)$

Se $\overbrace{\sup_n X_n}^{=X^*}$ è in L^1 allora $X_n \leq X^*$ $\forall n$ (ovvio, e $X^* \in L^1$) $\Rightarrow$ $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è U.I. (LEBESGUE) ASSURDO

$\Rightarrow \mathbb{E}(X^*) = +\infty$

Oppure, facendo i conti:

$$X_n(\omega) = \begin{cases} n+1 & \text{se } \omega \geq n+1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \Rightarrow X^*(\omega) = \omega$$

$$\mathbb{E}(X^*) = \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = +\infty \qquad = k\left(\frac{k+1-k}{k(k+1)}\right) = \frac{\cancel{k}}{\cancel{k}(k+1)} = \frac{1}{k+1}$$

ESERCIZIO: Mazzo 40 carte, 20 rosse, 20 nere vengono girate una a una. Dico ROSSA LA PROSSIMA, vinco se indovino, perdo se non indovino, voglio vedere se riesco a massimizzare la probabilità di successo.

$n = 0, \dots, 39$ chiamo R_n = # carte rosse nel mazzo
$R_0 = 20$

$\mathcal{F}_n = \sigma\{R_0, \dots, R_n\}$ è l'informazione che ho all'istante n (quello che devo usare per dire rossa la prossima)

$\Rightarrow \tau$ = istante in cui decido di dire rossa la prossima è un tempo di arresto rispetto a $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$

A_n = {le n-carta girata è rossa}

Vinco su $\bigcup_{n=0}^{39}(\{\tau=n\}\cap\{A_{n+1}\}) =: A_{\tau+1}$

Probabilità di vincere è:

$$\sum_{n=0}^{39} \mathbb{P}(\{\tau=n\}\cap\{A_{n+1}\})$$

(1) Calcolare $\mathbb{P}(A_{n+1} \mid \{R_n = J\})$

$$\mathbb{P}(A_{n+1} \mid \{R_n = J\}) = \frac{J \to \text{\# carte rosse}}{40-n \to \text{\# carte rimaste}}$$

(2) Calcolare $\mathbb{P}(R_{n+1} = k \mid \{R_n = J\})$

$$= \begin{cases} 1-\frac{J}{40-n} & \text{se } k=J \\ & (0 \text{ altrimenti}) \\ \frac{J}{40-n} & \text{se } k=J-1 \end{cases}$$

(3) Calcolare $\mathbb{E}(R_{n+1} \mid R_n)$

$$= \sum_{J=0}^{20} \mathbb{E}^{\mathbb{P}(\cdot \mid R_n=J)}(R_{n+1})\, I_{\{R_n=J\}}$$

$$\stackrel{!}{=} \sum_{J=0}^{20} \left[(J-1)\left(\frac{J}{40-n}\right) + J\left(1-\frac{J}{40-n}\right)\right] I_{\{R_n=J\}}$$

$$\stackrel{!}{=} \sum_{J=0}^{20} \frac{J(40-n)-J}{40-n} I_{\{R_n=J\}} = \sum_{J=0}^{20} J\cdot\frac{39-n}{40-n} I_{\{R_n=J\}} = \frac{39-n}{40-n}\cdot R_n = R_n - \frac{1}{40-n} R_n$$

$39-n = 40-(n+1)$

$$\mathbb{E}\left(\frac{R_{n+1}}{40-(n+1)} \,\Big|\, R_n\right) = \frac{R_n}{40-n}$$

Osserviamo che $\mathbb{E}(R_{n+1} \mid R_n) = \mathbb{E}(R_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$ $\quad \mathcal{F}_n = \sigma(R_n)$

$\Rightarrow M_n = \dfrac{R_n}{40-n}$ è martingala (limitata, ovvio dato che tutto è limitato)

Osserviamo anche che per (1) vale

$$\mathbb{E}(I_{A_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n) = \frac{R_n}{40-n} = M_n$$

Probabilità di successo era

$$\sum_{k=0}^{39} \mathbb{P}(\{\tau=k\}\cap A_{k+1}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{39} \mathbb{E}(I_{\{\tau=k\}} I_{A_{k+1}}) \overset{\text{perché } I_{\{\tau=k\}} \text{ è } \mathcal{F}_k \text{ misurabile}}{=} \sum_{k=0}^{39} \mathbb{E}(\mathbb{E}(I_{A_{k+1}} \mid \mathcal{F}_k) I_{\{\tau=k\}})$$

$$= \sum_{k=0}^{39} \mathbb{E}(M_k I_{\{\tau=k\}}) = \mathbb{E}(M_\tau) = \mathbb{E}(M_0) = 1/2$$

quindi tanto vale cominciare a dire subito così non perdo tempo

ESERCIZIO: Posta normalizzata a 1.

Giocatore all'istante 1 ha $1/2$ (quindi il banco ha $1/2$)

X_n = capitale del giocatore all'istante n

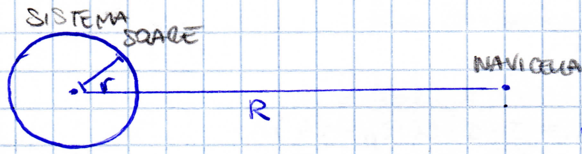
All'istante n (il giocatore ha X_n), vince con probabilità $(1-X_n)$ se vince guadagna $1/3$ del capitale del banco, se perde perde $1/3$ del suo capitale.

(N.B. è un gioco simmetrico a somma 1, è "ovvio" che è una martingala !?)

(1) Provare che $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è martingala rispetto alla filtr. naturale
(2) Dire se (X_n) converge $\mathbb{P}$-q.c.
(3) " " " " in L^2 } ovvio perché è limitata, ha somma
(4) Calcolare $\mathbb{E}(X_\infty)$ → viene facile dal pto 3
(5) Calcolare $\mathbb{E}(X_{n+1}^2 \mid X_n)$
(6) Determinare la legge di X_∞ → ovvio, viene una Bernoulli, dato che visto che converge X_∞ sarà o zero o d

18/05/2012

PROBLEMA dell' ENTERPRISE:



La navicella a ogni istante può scegliere il modulo dello spostamento ma la direzione è casuale.

Successione $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di v.a. uniform. distribuite su S^2 (direzione) e indipendenti

Succ. $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ processo prevedibile a valori in $\mathbb{R}^+$ (velocità)

$\Rightarrow X_n = X_{n-1} + C_n\theta_n$, $X_0 = (R,0,0)$

θ_n unif distr. su S^2 significa che $\mathbb{P}(\theta_n \in A) \sim$ Misura di A (nel senso di area) proporzionale $\forall A \in S^2$ aperto

Vogliamo trovare una strategia C_n che ci porti più vicino al sistema solare (meglio se dentro)

Definisco $\tau = \min\{n : |X_n| \le r\}$.
Voglio studiare $\mathbb{P}(\tau < +\infty)$ per le varie strategie $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Dimostreremo che:

(1) $\mathbb{P}(\tau < +\infty) < \frac{r}{R}$

(2) $\forall \varepsilon \ \exists C^\varepsilon$ t.c. $\mathbb{P}(\tau < +\infty) \geq \frac{r}{R} - \varepsilon$

$\Rightarrow \sup_C \mathbb{P}(\tau < +\infty) = \frac{r}{R}$

Useremo il seguente teorema: → integrale rinormalizzato, rispetto alla misura della sfera

TEO: $\varphi(\bar{x}) = \int_{\partial B(0,\ell)} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{r}|}\, d\sigma(\bar{r}) = \begin{cases} \frac{1}{\ell} & \text{se } |\bar{x}| \le \ell \\ \frac{1}{|x|} & \text{se } |\bar{x}| > \ell \end{cases}$ $\hookrightarrow \int \{\dots\} \cdot \frac{1}{|\partial B(0,\ell)|}$

(i.e. il potenziale di una carica è costante all'interno della sfera mentre è uguale a $\frac{1}{|x|}$ all'esterno)

"dim": se $|x| \le \ell$ allora $\int \cdots$ è fz armonica e quindi è costante

se $|x| > \ell$ allora $\frac{1}{|\bar{x} - \bar{r}|}$ è fz armonica e l'integrale è costante e è uguale al valore in 0 $(r=0)$ ∎

Conseguenza, θ uniforme su S^2:

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{|X + \theta\ell|}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\ell} & \text{se } |X| \le \ell \\ \frac{1}{|X|} & \text{se } |X| > \ell \end{cases}$$

Chiamo $Z_n = \frac{1}{|X_n|}$ $(X_n \in \mathbb{R}^3)$

Prendiamo $\mathcal{F}_n = \sigma\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$

È ragionevole pensare che C_n è $\mathcal{F}_{n-1}$ misurabile, da cui segue che X_n è $\mathcal{F}_n$-misurabile

$$\mathbb{E}(Z_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{|X_{n-1}+\vartheta_n C_n|} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)$$

Freezing

$$= \mathbb{E}\left(\frac{1}{|\bar{x}+\vartheta_n c|}\right)\Big|_{\substack{\bar{x}=X_{n-1}\\ c=C_n}} = \begin{cases} \frac{1}{|C_n|} & \text{se } |X_{n-1}| \le |C_n| \\ \frac{1}{|X_{n-1}|} & \text{se } |X_{n-1}| > |C_n| \end{cases}$$

$\Rightarrow \mathbb{E}(Z_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) \le Z_{n-1}$ (perché se $|X_{n-1}| \le C_n \to \frac{1}{|C_n|} \le \frac{1}{|X_{n-1}|} = Z_{n-1}$)

Z_n è una supermartingala e $Z_n \in L^1 \ \forall n$

Osserviamo anche che se $C_n \le |X_{n-1}| \ \forall n$ allora Z_n è una martingala (equivale al fatto che mi sposto sempre meno della distanza a cui sono)

COROLLARIO: $\mathbb{P}(\tau < +\infty) \le \frac{r}{R}$

dim. $\exists Z_\infty \in L^1$ t.c. $Z_n \to Z_\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. (perché Z_n superm. ≥ 0)
$Z_\infty \ge 0$

So che anche $(Z^\tau)_n = (Z_{n\wedge\tau})$ è una supermartingala

$\Rightarrow \mathbb{E}(Z^\tau_n) \le \mathbb{E}(Z_0) = \frac{1}{R}$

$\lim_{n\to\infty} Z^\tau_n = Z_\tau I_{\{\tau<+\infty\}} + Z_\infty I_{\{\tau=+\infty\}}$

$$\mathbb{E}(Z_\tau I_{\{\tau<+\infty\}} + Z_\infty I_{\{\tau=+\infty\}}) = \mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} Z_n^\tau) \overset{\text{Fatou}}{\le} \liminf_n \mathbb{E}(Z^\tau_n) \le \frac{1}{R}$$

$$\mathbb{E}(Z_\tau I_{\{\tau<+\infty\}} + \underbrace{Z_\infty I_{\{\tau=+\infty\}}}_{\ge 0}) \ge \mathbb{E}(Z_\tau I_{\{\tau<+\infty\}})$$

$Z_\tau = \frac{1}{|X_\tau|}$ ma $|X|_\tau \le r \Rightarrow Z_\tau \ge \frac{1}{r}$

$\ge \frac{1}{r} \cdot \mathbb{P}(\tau < +\infty)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\tau<+\infty) \le \frac{r}{R}$ ∎

dice che se arrivo nel Sist. Sol. ho prob nulla di arrivare sul bordo

LEMMA: $\mathbb{P}(X_\tau = r, \tau < +\infty) = 0$
(lo dimostra dopo)

$$\frac{1}{R} \ge \mathbb{E}(Z_\tau I_{\{\tau<+\infty\}} + Z_\infty I_{\{\tau=+\infty\}}) \ge \mathbb{E}\left(\frac{1}{|X_\tau|} I_{\{\tau<+\infty\}}\right) \overset{\text{per il lemma}}{>} \frac{1}{r}\mathbb{P}(\tau<+\infty)$$

e quindi abbiamo ottenuto (1)
Questo ci dice che non possiamo massimizzare le speranze, perché il max non può essere raggiunto, non esiste una strategia ottima.

Ma ora mi chiedo se r/R è davvero l'inf o se ~~...~~ l'inf è ancora + piccolo, ovvero mi chiedo se $\forall \varepsilon \ \exists C^\varepsilon$ t.c. $\mathbb{P}(\tau<+\infty) \ge \frac{r}{R} - \varepsilon$

Ora allora cerchiamo delle strategie ε-ottime.

$$\text{Prendo } C^\varepsilon_n = \begin{cases} |X_{n-1}| - (r-\varepsilon) & \text{se } |X_{n-1}| > r \\ 0 & \text{se } |X_{n-1}| \le r \end{cases}$$

In questo caso $Z^\tau_n = Z_n \ \forall n$ (perché ho posto $C^\varepsilon_n = 0$ se $|X_{n-1}| \le r$)
quindi Z_n si arresta già da sola.

Abbiamo che in questo modo $C\xi_n \leq |X_n|$ e quindi Z_n è una martingala.

Osserviamo che $|Z_n| \leq \frac{1}{r-\varepsilon}$ e quindi:

$\Rightarrow Z_n \longrightarrow Z_\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. e in L^p (perché è limitata)

$\mathbb{E}(Z_\infty) \overset{\text{perché martingala U.I.}}{=} \mathbb{E}(Z_0) = \frac{1}{R}$

(*) $\frac{1}{R} = \mathbb{E}(Z_\infty) = \mathbb{E}(Z_\tau I_{\{\tau<+\infty\}}) + \mathbb{E}(Z_\infty I_{\{\tau=+\infty\}})$

perché $Z_\infty = Z^\tau_\infty$ ($Z_n = Z^\tau_n$ $\forall n$)

Supponiamo di sapere che $Z_\infty I_{\{\tau=+\infty\}} \equiv 0$ (non è ovvio, cioè significa che se $\tau=+\infty$ allora $X_\infty = +\infty$, cioè mi perdo)

$(*) \Rightarrow \frac{1}{R} \leq \frac{1}{r-\varepsilon} \mathbb{P}(\tau<+\infty)$

e quindi $\mathbb{P}(\tau<+\infty) \geq \frac{r-\varepsilon}{R} = \frac{r}{R} - \varepsilon'$

Resta da mostrare che:

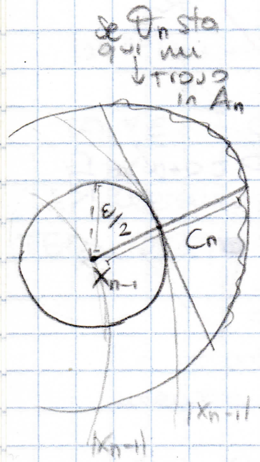
$\{\tau=+\infty\} \subset \{\lim_{n\to\infty} |X_n| = +\infty\}$

dim: Prendiamo $A_n = \{|X_n| \geq |X_{n-1}| + \varepsilon/2\}$

So che $\lim_{n\to\infty} |X_n|$ esiste $\mathbb{P}$-q.c. (perché esiste quello di $Z_n = \frac{1}{|X_n|}$)

Da questo deduco che:

$\{\omega : \omega \in A_n \text{ per } \infty\ n\} \subset \{\lim_{n\to\infty} |X_n| = +\infty\}$ perché $|X_n|$ "cresce" di $\frac{\varepsilon}{2}$ e altrimenti limite "costante"



Quindi mi basta mostrare che:

$\{\tau=+\infty\} \subset \{\omega : \omega \in A_n \text{ per } \infty\ n\}$

Ricordiamo di che $X_n = X_{n-1} + C_n\theta_n$ e che su $\{\tau=+\infty\}$ $C_n > \varepsilon$

Quindi: $A_n \supset \underbrace{\{\theta_n \in I\}}_{B_n \to \text{ eventi indipendenti}}$ per un certo $I = \}$

$\{\omega \in B_n \text{ per } \infty\ n\} \subset \{\omega \in A_n \text{ per } \infty\ n\}$

Ma abbiamo che $\mathbb{P}(\theta_n \in I) > \delta > 0$ — da vedere meglio, l'ho rifatto sotto.

$\Rightarrow P = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(\omega \in A_n \text{ per } \infty\ n) = 1$ (...)

20

23/05/2012

Dobbiamo dimostrare (lo rifà, bah) che $\mathbb{P}$-q.c. su $\{\tau=+\infty\}$ si ha $\lim_{n\to\infty} |X_n| = +\infty$ o equivalentemente $\mathbb{P}(\tau=+\infty, \sup_n |X_n| < +\infty) = 0$

(...) So a priori che $\exists \lim_{n\to\infty} |X_n| \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$

$A_n = \{|X_n| \geq |X_{n-1}| + \frac{1}{2}\varepsilon\}$

$\{\omega \in A_n \text{ per } \infty\ n\} \subset \{\lim_{n\to\infty} |X_n(\omega)| = +\infty\}$

Se $\tau(\omega) = +\infty$ allora $C_n(\omega) > \varepsilon$.

Osservo che $|X_n| \geq |X_{n-1}| + C_n \langle \theta_n, \hat{X}_{n-1} \rangle$ con $\hat{X}_{n-1} = \frac{X_{n-1}}{\|X_{n-1}\|}$ (versore)

N.B. è vero solo su $\{\tau=+\infty\}$ (altrimenti non è $C_n > \varepsilon$)

Chiamiamo $B_n = \{\langle \theta_n, \hat{X}_{n-1}\rangle \geq \frac{1}{2}\}$. Dico che $B_n \subset A_n$. (IP-q.c.)

Basterebbe far vedere che su $\{\tau=+\infty\}$ si ha $\{\omega\in B_n \text{ per } \infty\ n\}$

o detto meglio: $\mathbb{P}(\tau=+\infty \text{ e } \omega\notin B_n \text{ per } n \text{ suff. grande}) = 0$

$\exists N=N(\omega): \forall n>N$ si ha...

Dimostro qualcosa di più forte, ovvero che

$$\mathbb{P}(\omega\in B_n \text{ per } \infty\ n) = 1$$

Chiamo $Y_n = \langle \theta_n, \hat{X}_{n-1}\rangle$.

Dico che la famiglia $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è famiglia indipendente.

(N.B. non è una cosa banale)

Osserviamo che $\mathcal{L}(Y_n) = \mathcal{L}(\langle\theta_n, (1,0,0)\rangle)$

perché è invariante per rotazione, quindi posso mettere un versore qualsiasi

Per vedere l'indipendenza calcolo:

$\mathbb{P}(Y_1\in C_1, \dots, Y_n\in C_n)$ con $C_i\in\mathcal{B}([-1,1])$ (sono dei coseni)

$= \mathbb{E}(I_{C_1}(Y_1)\cdots I_{C_n}(Y_n)) = \mathbb{E}(I_{C_1}(\langle\hat{X}_0,\theta_1\rangle)\cdots I_{C_n}(\langle\hat{X}_{n-1},\theta_n\rangle))$

$= \mathbb{E}(\mathbb{E}((\cdots)\mid\mathcal{F}_{n-1}))$

$= \mathbb{E}(\underbrace{I_{C_1}(\langle\hat{X}_0,\theta_1\rangle), \dots, I_{C_{n-1}}(\langle\hat{X}_{n-1},\theta_{n-1}\rangle)}\,\mathbb{E}(I_{C_n}(\langle\hat{X}_{n-1},\theta_n\rangle\mid\mathcal{F}_{n-1}))$

Freezing

$= \mathbb{E}(\cdots\mathbb{E}(I_{C_n}(\langle x,\theta_n\rangle))|_{x=\hat{X}_{n-1}})$

$\mathcal{L}(\langle x,\theta_n\rangle) = \mathcal{L}(\langle(0,0,1),\theta_n\rangle) \Rightarrow \mathbb{E}(I_{C_n}(\langle x,\theta_n\rangle)) = \mathbb{E}(I_{C_n}(\langle(0,0,1),\theta_n\rangle))$ non dipende da x

$= \mathbb{E}(I\cdots I\cdot\mathbb{P}(\langle(0,0,1),\theta_n\rangle\in C_n))$

è un numero, posso portarlo fuori!

$= \mathbb{P}(\langle(0,0,1),\theta_n\rangle\in C_n)\cdot\mathbb{E}(I_{C_1}(\langle\hat{X}_0,\theta_1\rangle)\cdots I_{C_{n-1}}(\langle\hat{X}_{n-2},\theta_{n-1}\rangle))$

continuando allo stesso modo

$= \mathbb{P}(\langle(0,0,1),\theta_n\rangle\in C_n)\cdots\mathbb{P}(\langle(0,0,1),\theta_1\rangle\in C_1)$

Osservo anche che

$\mathbb{P}(Y_n\in C_n) = \mathbb{E}(I_{C_n}(\langle\hat{X}_{n-1},\theta_n\rangle)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(I_{C_n}(\langle\hat{X}_{n-1},\theta_n\rangle)\mid\mathcal{F}_{n-1}))$

Freezing

$= \mathbb{E}(\mathbb{E}(I_{C_n}(\langle x,\theta_n\rangle)|_{x=\hat{X}_{n-1}}) = \mathbb{E}(I_{C_n}(\langle(0,0,1),\theta_n\rangle)) = \mathbb{P}(\langle(0,0,1),\theta_n\rangle\in C_n)$

$= \mathbb{P}(Y_n\in C_n)\cdots\mathbb{P}(Y_1\in C_1)$

$\Rightarrow (Y_n)$ è famiglia indipendente.

Abbiamo che $B_n = \{Y_n\geq 1/2\}$, allora

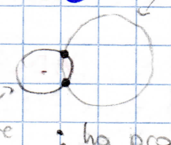
$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\langle(0,0,1),\theta_n\rangle\geq 1/2) = \delta > 0$ $\to$ δ non dipende da n perché le θ_n sono i.i.d.

(B_n) succ. indipendente di eventi con $\sum\mathbb{P}(B_n) = +\infty$

Per Borel-Cantelli $\mathbb{P}(\omega: \omega\in B_n \text{ per } \infty\ n) = 1$ ■

Ora dimostriamo il lemma, più o meno. Dimostro che

$$\mathbb{P}(|X_n| = r) = 0 \quad \forall n$$



dim: Dimostro per induzione che $P(|X_n|\in\{0,r\})=0$

$$P(|X_{n-1}+C_n\theta_n|\in\{0,r\}) = \mathbb{E}(I_{\{0,r\}}(|X_{n-1}+C_n\theta_n|))$$

$$= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(I_{\{0,r\}}(|x+c\theta_n|))\big|_{\substack{x=X_{n-1}\\ c=C_n}}\right)$$

$$\mathbb{E}(I_{\{0,r\}}(|x+c\theta_n|)) \leq I_{(0,r)\cup\{r,0\}}(|x|,c)$$

$$= \mathbb{E}(I_{\{0,r\}\cup\{r,0\}}(|X_{n-1}|,C_n)) = 0 \quad \text{per hp induttiva} \quad \blacksquare$$

4. PROCESSI A TEMPO CONTINUO

def: $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, $(X_t)_{t\in I}$ $(I=[0,b]$ o $I=\mathbb{R}^+)$ è un **PROCESSO REALE** se $\forall t\in I$ X_t è v.a. reale.

def: Diremo che $(X_t)_{t\in I}$ è un **PROCESSO MISURABILE** se l'applicazione
$$(t,\omega)\longmapsto X_t(\omega)$$
è misurabile su $\mathcal{B}(I)\otimes\mathcal{F}$

processo $X=(X_t)_{t\in I}$

def: $\forall\omega\in\Omega$, l'applicazione $t\longrightarrow X_t(\omega)$ si chiama **TRAIETTORIA** del processo.

def: X e Y processi $\Omega\times I\longrightarrow\mathbb{R}$. X e Y sono **INDISTINGUIBILI** se $\exists\,\Omega_0\in\mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(\Omega_0)=0$ t.c. $\forall\omega\notin\Omega_0$ si ha $X_t(\omega)=Y_t(\omega)$ $\forall t\in I$

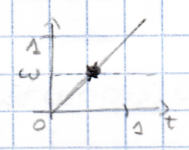
Diciamo invece che Y è una **VERSIONE** di X (o viceversa) se si ha $\forall t\in I \Rightarrow \mathbb{P}(X_t=Y_t)=1$ (si dice anche MODIFICAZIONE)

OSS: Se X e Y sono indistinguibili allora Y è una versione di X

CONTROESEMPIO: $\Omega=[0,1]$, $I=[0,1]$, $\mathbb{P}=$ Leb.

$$X_t(\omega) = I_{\{t\}}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega=t \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

$Y\equiv 0$ $\quad(Y_t(\omega)=0 \;\; \forall t,\forall\omega)$



---- $X_t(\omega)=0$

★ = $X_t(\omega)=1$

$$\{X_t=Y_t\}=\Omega\setminus\{t\} \quad\Rightarrow\quad \mathbb{P}(X_t=Y_t)=1$$

$\forall\omega$ non è mai vero che $X_t(\omega)=Y_t(\omega)$ $\forall t\in[0,1]$ dato che $\forall\omega$:

OSS: Questo tipo di problemi (in cui versione ⇏ indistinguibili) sono tipici di processi a traiettoria discontinua (che sono anche processi importanti)

def: Un processo X ha **TRAIETTORIA CONTINUA** se $\exists\,\Omega_0\in\mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(\Omega_0)=0$ t.c. $\forall\omega\notin\Omega_0$ l'applic. $t\longmapsto X_t$ è continua $: I\to\mathbb{R}$

def Un processo X è **CADLAG** se $\exists\,\Omega_0\in\mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(\Omega_0)=0$ t.c. $\forall\omega\in\Omega_0$ l'applic. $t\longmapsto X_t$ è cadlag

NB: CADLAG ⇒ TRAIET. CONT

def: $f: I\longrightarrow\mathbb{R}$ è **CADLAG** (continue à droit et limité à gauche) se $\forall t\in I$ $\exists\lim_{s\searrow t} f(s)=f(t)$ e $\exists\lim_{s\nearrow t} f(s)\in\mathbb{R}$ si pone $\Delta f(t):=f(t)-f(t^-)$